GENERAL SOLUTION $\boldsymbol{exp}\,\zeta(s,\Delta_{12}(q))$ OF THE EULER-POISSON EQUATIONS AS THE SOLUTION OF THE FUNCTIONAL QUATERNIONIC $\boldsymbol{q}$-PENDULUM AND CANONICAL FUNCTIONAL EXPONENT

D.L. Abrarov
abrarov@yandex.ru

Abstract. The work structures, details and develops the argumentation and the applied value of the effect of exact solvability of the Euler-Poisson equations, revealed in monograph [1]. The most essential assertations are proved in [1], the proofs of the other assertations are either discussed or outlined. An essential new circumstance is that an equivariant analytic Galois solvable structure (connection) on the group $SO(3)$ induces a canonical analytic functional connection on the space of classical quaternions. Such a connection on the emerging space of functional quaternions has a canonical L-functional potential over the field $\mathbb{C}$ in the form of a function $exp\,\zeta(s,\Delta_{12}(q))$, which is a general solution of the original equations and represents canonical functional exponent.

The revealed functional quaternionic nature of the Euler-Poisson equations canonically leads to their integrability on the coadjoint representation of the algebra $e_8(\mathbb{Q}(s))$. This algebra is a canonical simply connected functional extension of the simple exceptional algebra e_8, defined over the field of rational functions over $\mathbb{C}(s)$ and is isomorphic to central symmetry in 5-dimensional Euclidean space.

It is paradoxical that these equivariant functional symmetries represent the phase flow of the canonical analytic pendulum with the canonical angular coordinate represented by the automorphic modular cusp form $\Delta_{12}(q)$ of weight 12.

The phase flow of this pendulum is isomorphic to 281-dimensional special orthogonal group $SO(281,\mathbb{R})$ and is an orthogonal representation of the functional exponent. This symmetry has the mechanical meaning of the inertial rotation of the rotor in a fully stabilized gimbal. The number 281 (Ryazantsev's constant from QFT) is the number of degrees of freedom of this universal gyroscope. This mechanical system is the mechanical interpretation of the general solution of the Euler-Poisson equations.

The coordination of this symmetry gives an explicit analytical form of the general solution of the classical Euler-Poisson equations over complex time in the form of *the universal analytic δ-function*: the exponential of the zeta-function of the modular cusp form $\Delta_{12}(q)$, as well as their particular solutions: the exponential of the Hasse-Weil L-functions (for $\mathbb{C}$-time) and zeta-functions of elliptic curves over the field $\mathbb{Q}$ (for $\mathbb{R}$-time). Such a functional space forms an *analytical δ-functional complex*.

In the context of the emerging need to correct both the classical solutions and the existing classification of integrable cases of the Euler-Poisson equations, a connection is made between the general L-functional solution and the classical cases of integrability and KAM-theory. This correction has a "rigid analytical" δ-shaped functional and essentially quantum character.

The mechanical (and physical) meaning of the exact general solution is the finite hierarchy (complex) of gyroscopes in the central gravitational field, which turns out to be the result of the canonical compactification of classical dynamics with singularities at the fixing points of the tops.

An interpretation of the general solution as the gravitational potential of a massive ball-dipole is given, as well as the connection of this interpretation with the Newtonian three-body problem. This interpretation correlates with the experimental variations of the Dzhanibekov effect which exhibits the nontrivial orientational dynamics of perturbed artificial satellites.

Keywords: *Euler-Poisson equations, exact solvability, functional exponent, Adlaj duality, self-similarity of isotropic 3d-sphere $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ and homogeneous 4d-sphere $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$, functional quaternions, zeta-function $\zeta(s,\Delta_{12}(q))$, L-functions of elliptic curves over $\mathbb{Q}$, isotropic δ-functions, algebra $e_8(\mathbb{Q}(s))$, functional quaternionic pendulum, modular q-pendulum, gyroscopic self-oscillations of tops, Galois axes, gravity of ball-monopole and ball-dipole, Dzhanibekov multiorientation, functional quaternionic q-quantization.*

1. Уравнения Эйлера-Пуассона представляют канонический аналитический маятник и определяют каноническую функциональную экспоненту

Задача о движении массивных твердых тел (волчков), кодируемая классическими уравнениями Эйлера-Пуассона, наряду с классической ньютоновой задачей трех тел, является фундаментальной проблемой классической механики, имеющей многочисленные технологические приложения гироскопического характера.

В книгах [2], [3] содержатся основные результаты динамики классического твердого тела и описываются различные подходы к проблеме разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона. В монографии [1] развивается подход, направленный на унификацию и полную классификацию классических решений, включающий синтез общих и частных случаев интегрируемости и необходимость контекстной коррекции КАМ-теории.

Дифференциальные уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие динамику трехмерных тяжелых твердых тел (волчков) в плоско-параллельном поле тяжести имеют вид:

$$d\vec{M}/dt = [\vec{M}, \vec{\omega}] + k[\vec{\gamma}, \vec{c}], \tag{1}$$

$$d\vec{\gamma}/dt = [\vec{\gamma}, \vec{\omega}], \tag{2}$$

где соответствующие вектора $\vec{M} = I\vec{\omega}$ – кинетический момент тела, $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела, $\vec{c}$ – направляющий вектор прямой от неподвижной точки до центра масс, $\vec{\gamma}$ – проекции вертикального орта (выбранной/отмеченной системы отсчета в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$) на оси подвижной системы координат, жестко связанной с телом.

Где также I – диагонализированный тензор инерции тела в его неподвижной точке, $k = mg|r_c|$ – коэффициент, равный произведению веса тела на расстояние от неподвижной точки до центра масс, [,] – операция векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве.

Ответ на вопрос о разрешимости уравнений (1) – (2), в итоге, совершенно конструктивен и, с виду парадоксальным образом, состоит в том, что их **фазовый поток представляется каноническими колебаниями классического математического маятника, рассмотренного просто как *аналитическая динамическая система* и поэтому автоматически интегрируется как *система с одной аналитической степенью свободы.***

Вместе с тем, фазовый поток такой аналитической, формально одностепенной, системы оказывается крайне содержательным со всех точек зрения.

Например, существенным оказывается то, что эта единственная степень свободы является функциональной, а не классической: она представляет каноническую угловую координату на фазовом потоке классического маятника, аналитически продолженным в его вертикальное равновесие. Эта координата имеет конструктивную каноническую аффинную асимптотическую структуру в виде функции $\Delta_{12}(q)$).

Компактификация фазовой динамики классического маятника посредством ее продолжения в вертикальное равновесие оказывается фазовым потоком ***канонического функционального математической маятника*** и имеет также ряд других маятнико-осцилляторных интерпретаций, обсуждаемых в данной работе.

Результат интегрирования уравнений для такого функционального маятника представляется *канонической функциональной экспонентой* – функцией $exp\ \zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

Таким образом, основным математическим эффектом, конструктивизирующим эффект точной разрешимости является то, что ***уравнения Эйлера-Пуассона являются уравнениями на каноническую функциональную экспоненту.***

С физической точки зрения скрытым эффектом, ведущим к такой линеаризующей модели, является *устранение некорректности моделирования формально безразмерными* *уравнениями* (1) – (2) *над вещественным или комплексным временем реального физически размерного явления вращения тяжелых волчков, определенного на более широкой области определения.*

В этом контексте маятниковая линеаризация (калибровка) восставливает скрытую «размерную» симметрию уравнений (1) – (2).

Исходные уравнения (1) – (2) являются лишь *аффинной кодировкой* (над аффинным $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$-временем) *канонического экспоненциального самоподобия реального физического пространства-времени – отображения конфигурационно-фазовой когерентности фазовых состояний данных уравнений.*

Результат такой фазово-когерентной маятниковой калибровки уравнений (1) – (2) определяет *каноническую функциональную экспоненту от аффинной комплексной переменной.*

Каноническая функциональная экспонента является:

- канонической экспонентой на области определения вертикального равновесия классического маятника;
- канонической односвязной компактификацией классической экспоненты, которая может быть рассмотрена как каноническая координата на каждом из асимтотических движений классического маятника;

- каноническим односвязным аналитическим продолжением классической экспоненты в $\pm\infty$.

Парадоксально, что при этом уравнения (1) – (2) являются:

- аффинным дифференциалом канонического отображения односвязной компактификации уравнений для классической экспоненты в точках $\pm\infty$;
- аффинным дифференциалом на отображении колебания классического маятника вокруг его вертикального равновесия.

Ключевым моментом, обеспечивающим векторнозначную структуру такого парадоксального маятникового представления уравнений Эйлера-Пуассона, является эквивалентность указанных представлений функциональной экспоненты (как потенциала колебаний функционального маятника) канонической экспоненте $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ (см. теоремы 2 – 3, п.14).

Данная эквивалентность реализуется посредством скрытой канонической рекурсивной градуировки односвязной компактификации классической экспоненты.

Механическим смыслом *канонической функциональной экспоненты* является полная механическая энергия канонического универсального трехстепенного гироскопа, изначально скрытого в обличьи «всего лишь» вертикального равновесия классического маятника.

При этом, *исходные уравнения оказываются только аффинной картой* на функциональном пространстве решений L-функционального уравнения для *канонической функциональной экспоненты*. И здесь ключевым моментом оказывается, что его решения обладают канонической $(3+3)$-градуировкой, обеспечивающей классическую аффинную векторнозначную структуру решения уравнений (1) – (2).

С точки зрения классических способов описания аналитической динамики волчков, *функциональный математический маятник,* формально одностепенная гамильтонова система, оказывается *эквивариантной нормализацией классического кватернионного представления уравнений* (1) – (2).

Данная нормализация просто учитывает симметрию инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ обратимости по времени уравнений (1) – (2) как скрытую диагональную перенормировку исходного аффинного фазового пространства $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma}, \vec{\omega})$.

С динамической точки зрения фазовый поток аналитического математического маятника является каноническим аналитическим продолжением фазового потока волчка Эйлера посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ в особенности его сепаратрисной динамики (см. [1]). Это отображение эквивалентно просто аналитическому двулистному накрытию классического фазового потока волчка Эйлера инволюцией $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$.

С математической точки зрения фазовый поток канонически определенного аналитического математического маятника оказывается:

- канонической эквивариантной Галуа-нормировкой фазового потока исходных уравнений (1) – (2);
- канонической аналитической структурой на группе $SO(3)$, имеющей потенциал в виде специальной функции $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$;
- канонической функциональной экспонентой;
- канонической функциональной кватернионной экспонентой.

Функция $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$, в итоге, является (см. [1]):

- результатом канонического аналитического продолжения:
    - динамики классического маятника в его вертикальное равновесие,
    - сепаратрисной динамики волчка Эйлера в ее особенности;
- центральной симметрией глобального (однокартного) нормального расслоения группы $SO(3)$, индуцированной инволюцией обратимости по времени уравнений (1) – (2).

2. Каноническая функциональная кватернионная модель уравнений Эйлера-Пуассона

Функция $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ также является потенциалом канонического аналитического отображения самоподобия (автоморфизма) кокасательного (нормального) расслоения $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ с канонической *функциональной групповой Галуа-структурой* и представляет общее решение уравнений (1) – (2) – корректно определенного дифференциала этого самоподобия.

Данное отображение самоподобия расслоения $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ эквивалентно аналитическому самоподобию $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ и представляется канонической функциональной экспонентой (см. п.1).

Каноничность Галуа-структуры индуцирована каноническим производным отображением канонического изоморфизма $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C})$ – каноническим изоморфизмом касательного и кокасательного расслоений евклидова $4d$-пространства $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C})$ посредством отображения центральной симметрии в евклидовом $5d$-пространстве $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C})$.

Данный изоморфизм представляется дифференциалом нейтрального элемента указанного выше группового Галуа-самоподобия $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ и $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$) (см. пп. 23 – 25).

Данный изоморфизм оказывается фундаментальным, поскольку ведет к выявлению модели уравнений (1) – (2) на базе канонического функционального расширения классических кватернионов.

Изоморфизм $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C})$ в рассматриваемом механическом контексте представляет следующие *канонические отображения, индуцированные инволюцией* $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

- двойственность нижнего и верхнего равновесий классического маятника (двойственность Адлая С.Ф., см, [1], с. 132);
- двойственность асимптотических фазовых траекторий к вертикальному равновесию классического маятника;

- двойственность противоположно ориентированных невырожденных гиперболических движений классической фазовой динамики волчка Эйлера;
- самодвойственность двояко-асимптотических движений фазовой динамики волчка Эйлера

и представляющие:

- каноническое конфигурационное пространство уравнений Эйлера-Пуассона;
- нейтральный элемент группового отображения обратимости по времени уравнений (1) – (2), в итоге, являющегося общей симметрией обратимости по времени гамильтониана классического математического маятника, рассмотренного *просто как аналитическая функция над полем* $\mathbb{C}$;
- основание канонической функциональной экспоненты.

Пространство функциональных кватернионов *является функциональным векторным пространством*, которое определяется *как каноническое двулистное накрытие канонического нормального расслоения* $3d$*-сферы* $\mathbb{S}^3$ и имеет следующие эквивалентные реализации:

- орбита глобального (однокартного) упорядоченного непрерывного изоморфизма $T_*\mathbb{S}^3 \cong T^*\mathbb{S}^3$ касательного и кокасательного (нормального) расслоений сферы $\mathbb{S}^3$;
- каноническое односвязное непрерывное 2-листное накрытие тела классических кватернионов самим собой (классические кватернионы – каноническая аффинная карта на функциональных кватернионах);
- каноническое односвязное расширение $\mathbb{S}^3$-модели классических кватернионов посредством потока больших *ко*кругов на $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ – орбит канонического глобального нормального расслоения сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
- каноническая комплексификация фазовой динамики волчка Эйлера – каноническое двулистное накрытие сепаратрисной динамики волчка Эйлера посредством инволюции обратимости по времени уравнений (1) – (2);
- область определения канонической функциональной экспоненты.

3. Функциональные кватернионы и свойство модулярности эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$ как функциональная кватернионная экспонента

Решениями уравнений (1) – (2) в контексте их кватернионной модели и в соответствии с моделью эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$ на базе сечений такой универсальной кривой (см. п.16, см. [1]) оказываются *канонически параметризованные* функциональные кватернионы:

- функции $L(s, E/\mathbb{Q})$ – над $\mathbb{C}$-временем (общие функциональные кватернионы);
- функции $\zeta(s, E/\mathbb{Q})$ – над $\mathbb{R}$-временем (вещественные функциональные кватернионы).

Собственно эллиптические кривые $E/\mathbb{Q}$, пополненные своим нейтральным элементом $idE/\mathbb{Q}$ (лежащим на формальной ∞-ти в их аффинном представлении), представляют канонические функциональные кватернионы.

В частности, это означает, что пространство функциональных кватернионов является пространством модулей кривых $E/\mathbb{Q}$.

Связь переменных исходных уравнений с «функционально кватернионными переменными» очень естественна:

- $\{\vec{\gamma}\}$ ↔ вещественные функциональные кватернионы;
- $\{\vec{\omega}\}$ ↔ чисто мнимые функциональные кватернионы.

Поэтому *функциональные кватернионы являются геометрической моделью свойства канонической модулярной параметризуемости кривых* $E/\mathbb{Q}$ (роль параметризующих кривых играют вещественные функциональные кватернионы).

Данная параметризация имеет:

- каноническую групповую Галуа-структуру, индуцируемую канонической Галуа-симметрийной структурой $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C})$;
- *структуру канонической функциональной кватернионной экспоненты*;
- *структуру канонической функциональной экспоненты*.

В контексте смысла изоморфизма $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C})$ как вертикального равновесия аналитического маятника изоморфизм $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C})$ является, как говорят, «косым» таким вертикальным равновесием.

Важно отметить, что аналитический контекст связи этих геометрических изоморфизмов реализуется виртуозными преобразованиями Ковалевской, последовательно нормализующими уравнения (1) – (2) (см. [1]).

Изоморфизм $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C})$ наделяет функциональные кватернионы структурой функционального модуля (векторного пространства) Галуа. Это является принципиальным отличием от классических кватернионов, имеющих, как известно, алгебраическую структуру тела.

Эквивалентная интерпретация связи «$3d$-твердотельных» и «$1d$-маятниковых» переменных состоит в том, что исходным переменным (их 6-ть) и параметрам (их 6-ть) уравнений (1) – (2) соответствуют канонически дуальные переменные на указанной функциональной аналитической двойственности нижнего и верхнего (вертикального) равновесий классического маятника.

В этом контексте:

- канонический изоморфизм $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C})$ парадоксальным образом играет *роль канонической нормальной аффинной модели* конфигурационного пространства уравнений (1) – (2);
- производный, также канонический, изоморфизм $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C})$ играет *роль канонической нормальной аффинной модели* фазового пространства уравнений (1) – (2).

И именно такая нормальная форма фазового пространства *индуцирует гамильтонову структуру* этих уравнений, приобретающую смысл их *аналитической суперсимметричной* структуры.

4. Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона как каноническое функциональное расширение классических кватернионов

Сформулируем общую структуру, возникающей *канонической функциональной кватернионной модели уравнений Эйлера-Пуассона, индуцированной существенно экспоненциальным свойством* $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$*-симметрии их обратимости по времени*:

- *фазовый поток уравнений* (1) – (2) *представляется колебаниями канонического функционального кватернионного маятника*;

- *кинематика уравнений* (1) – (2) *представляется пространством функциональных кватернионов, имеющим структуру функционального векторного пространства над полем* $\mathbb{C}$ с канонической метрикой, непрерывно согласованной с симметрией обратимости по времени уравнений (1) – (2) – симметрией, имеющей структуру инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ по их формальному времени $s|t$ (см. [1]):

$$< \vec{\gamma}(t), \vec{\omega}(t) >_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} = exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2).$$

Данная метрика является метрикой на *каноническом непрерывном двулистном накрытии* классических кватернионов, которые становятся ее изотропным конусом над вещественным временем t, представляющим каноническую орбиту изоморфизма

$$\mathbb{E}_{O,*}^{4}(\gamma_1,\gamma_{2,}\gamma_3,t) \cong \mathbb{E}_{O}^{4,*}(\omega_{1,}\omega_2,\omega_3,t).$$

С другой стороны, данная метрика оказывается канонической метрикой в фазовом пространстве уравнений (1) – (2) (см. [1]), инвариантной относительно пропускаемой классикой инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$.

В *этой* метрике любой *вектор фазового состояния* $(\vec{\gamma}(t), \vec{\omega}(t))$ приобретает смысл эллиптической кривой $E/\mathbb{Q}$ с модулярной параметризацией (см. [1]), имеющей следующие интерпретации:

- ➢ *Кватернионный аспект*:
  каждый *вектор* фазового состояния $(\vec{\gamma}(t), \vec{\omega}(t))$ интерпретируется как функциональный кватернион с веществественной частью $\vec{\gamma}(t)$ и с мнимой частью $\vec{\omega}(t)$,
- ➢ *Маятниковый аспект*:
  каждый *вектор* фазового состояния $(\vec{\gamma}(t), \vec{\omega}(t))$ интерпретируется как мгновенное состояние вертикального равновесия классического маятника, где $\vec{\gamma}(t)$ – упорядоченное право-ориентированное асимптотическое фактор-движение маятника, а $\vec{\omega}(t)$ – упорядоченное лево-ориентированное асимптотическое движение маятника к выделенному мгновенному состоянию вертикального равновесия классического маятника;

- *динамика уравнений* (1) – (2) (в виде эволюции отображения вектора кинетического момента во времени) представляется *каноническим отображением функциональной кватернионной экспоненты*, имеющим структуру отображения сопряжения над полем $\mathbb{C}$, при этом:
  - o кинематические уравнения (2) непосредственно определяют функциональные кватернионы и отображение их сопряжения,
  - o динамические уравнения (1) определяют их каноническое самосопряжение,
  - o фазовый поток уравнений (1) – (2) представляется самосопряжением (корректной экспонентой) пространства функциональных кватернионов, имеющим структуру векторного пространства над полем $\mathbb{C}$.

При этом потенциал канонического отображения сопряжения на пространстве функциональных кватернионов $\{Q\}$ (каноническая функциональная кватернионная экспонента) имеет вид:

$$Q[\vec{\gamma}(t), \vec{\omega}(t)] \to (\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3),$$

где вектор $(1,\ i,\ j)$ представляет упорядоченный набор ориентированных реберных медиан сопровождающего волчки тетраэдра, (см. [1]), и представляет:

- потенциал отображения кинетического момента сопровождающего аналитические волчки триэдра;

- потенциал производной (аналитической) модулярной параметризации эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$ (см. [1]).

Потенциалом модуля функциональной кватернионной экспоненты, имеющим смысл амплитуды колебаний функционального кватернионного маятника, является потенциал модуля *отображения самосопряжения функциональных кватернионов* (см. теорему 1, п.9):

- $H_{E-P,\mathbb{C}|\mathbb{R}} = |(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2$ над $\mathbb{C}$-временем;
- $H_{E-P,\mathbb{R}} = |(\omega_1 + i\omega_2)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2$ над $\mathbb{R}$-временем,

где:

- функция $H_{E-P,\mathbb{C}|\mathbb{R}}$ является общим интегралом уравнений (1) – (2) над $\mathbb{C}$-временем.

  Это:
  - канонический модуль функциональных кватернионов,
  - каноническая аналитическая метрика на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ (спаривание на ее диаметрах),
  - каноническая эквивариантная комплексификация интеграла Ковалевской;

- функция $H_{E-P,\mathbb{R}}$ является общим интегралом уравнений (1) – (2) над $\mathbb{R}$-временем.

  Это:
  - канонический модуль вещественных функциональных кватернионов,
  - каноническая аналитическая метрика на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ (спаривание на ее диаметрах),
  - классический интеграл Ковалевской (в классике – для ее случая).

Потенциалом аргумента функциональной кватернионной экспоненты, имеющим смысл *фазы* колебаний функционального кватернионного маятника, является потенциал аргумента *отображения самосопряжения функциональных кватернионов* (см. теоремы 2, 3, п.14):

- $exp\,\zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big)$ над $\mathbb{C}$-временем;
- $exp\,\zeta\left(\frac{1}{2} + it, \Delta_{12}(q)\right)$ над $\mathbb{R}$-временем,

где:

- $exp\,\zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big)$ является общим решением уравнений (1) – (2) над $\mathbb{C}$-временем.

  Это:
  - канонический аргумент функциональных кватернионов,
  - каноническая аналитическая метрика на $4d$-пространстве Лобачевского $\Lambda^4(\mathbb{C})$ (спаривание на дугах, опирающихся на диаметры $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$),
  - каноническая эквивариантная комплексификация общего решения уравнений (1) – (2);

- $exp\,\zeta\left(\frac{1}{2} + it, \Delta_{12}(q)\right)$ является общим решением уравнений (1) – (2) над $\mathbb{R}$-временем.

  Это:
  - канонический аргумент вещественных функциональных кватернионов,
  - каноническая аналитическая метрика на $3d$-пространстве Лобачевского $\Lambda^3(\mathbb{C})$ (спаривание на дугах, опирающихся на диаметры $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$),
  - классический интеграл Ковалевской (в классике – для ее случая).

5. Характеристики функциональных кватернионов в сопоставлении с классическими кватернионами

Приведем эти характеристики:

- *Классические общие интегрируемые случаи* (тривиальный – это независимый от других общий случай (адиабатический волчок, см. [1]), Эйлера, Лагранжа, Ковалевской), *рассмотренные как классы эквивалентности фазового потока уравнений* (1) – (2), являются упорядоченными каноническими базисными функциональными кватернионами, соответствующими классическому кватернионному базису $1,\ i,\ j,\ k$.

  Данное соответствие устанавливается как результат:
  - канонического вложения классических кватернионов в изоморфизм $\mathbb{E}^4_{O,*}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,t) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)$,
  - рассмотрения изоморфизма $\mathbb{E}^4_{O,*}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,t) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\omega_1,\omega_2,\omega_3,t)$ как канонической орбиты отображения корректно определенного глобального (однокартного) изоморфизма $T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ касательного и нормального расслоений сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (см. [1]),
  - вычисления классов эквивалентности автоморфизмов:
    - изоморфизма $T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ посредством корректно определенного отображения его экспоненты (см. теоремы 1 – 4),
    - двойственности двояко-асимптотических движений динамики волчка Эйлера,
    - двойственности асимптотических движений классического маятника.
- *Упорядоченные частные интегрируемые случаи* являются каноническим линейным упорядочением (связностью) с групповой структурой на множестве общих случаев интегрируемости (см. [1]).
- Соотношениям $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ соответствует инвариантность фазовых потоков общих интегрируемых случаев относительно инволюции обратимости $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$.
- Соотношению $i \cdot j \cdot k = -1$ для классических кватернионов соответствует соотношение:

  $$\vec{M}_L * \vec{M}_E \cong \vec{M}_K,$$

  где:
  - $\vec{M}_E, \vec{M}_L, \vec{M}_K$ – вектора кинетических моментов в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской соответственно, представляющие канонические генераторы соответствущих фазовых потоков над $\mathbb{C}$-временем;
  - операция «$*$» представляет фазовый поток случая Горячева-Чаплыгина над $\mathbb{C}$-временем; операционный комплекс с элементами – фазовыми потоками упорядоченных (иерархизированных) частных случаев интегрируемости; отображение фазового потока обобщенного эффекта Джанибекова (см. п.33),
  - знак изоморфизма «$\cong$» представляет фазовый поток тривиального волчка, реализующего:
    - каноническую непрерывную динамику уравнений (1) – (2),
    - каноническую адиабатическую динамику уравнений (1) – (2).

Замечание. Данное соотношение между общими случаями интегрируемости является следствием функционального уравнения для $\zeta\left(\frac{1}{2} + it, \Delta_{12}(q)\right)$-функции.

- *Все интегрируемые случаи* (в смысле упорядоченной композиции их фазовых потоков над $\mathbb{R}$-временем) представляют инерциальную динамику вращения ротора вокруг фиксированной оси в трехмерном пространстве в полностью стабилизированном трехстепенном кардановом подвесе (п.15, теорема 9).
- Соотношения для классических кватернионов $\{i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1\}$ представляют:
    - соотношения для *аффинных генераторов* изоморфизма фазового потока маятника строго в вертикальном равновесии;
    - соотношения для *аффинных генераторов* изоморфизма $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C})$, эквивалентного каноническому отображению центральной симметрии $5d$-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C})$ с выделенным центром O (отметим, что это отображение оказывается отображением канонической нормализации фазового потока уравнений (1) – (2) и описывается соответствующими преобразованиями Ковалевской);
    - условия полупериода (нечетного автоколебания) инерциальной строго периодической (и, в итоге, очень специально резонансной) динамики ротора в полностью стабилизированном трехстепенном кардановом подвесе.

Канонической угловой координатой на функциональном кватернионном маятнике является координата $q = e^{2\pi i z},\ z \in \mathbb{H}^+$, представляющая (см. п.26):

- каноническую аффинную координату на вертикальном равновесии классического маятника;
- каноническую аффинную координату на упорядоченном изоморфизме
$$\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}),$$
реализующем орбиту центральной симметрии $5d$-пространства $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C})$;
- каноническую угловую координату на вращении ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе.

6. Маятниковое представление фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона и дзета-функция Римана как потенциал его канонического многомерного обобщения

Таким образом, в результате теория уравнений Эйлера-Пуассона сводится к исследованию колебаний корректно определенного функционального кватернионного маятника (эквивалентная терминология: кватернионного q-маятника) на основе возникающего функционального кватернионного анализа и линейной алгебры в линейном пространстве функциональных кватернионов (его естественное название – «модуль Эйлера-Пуассона»).

Динамика функционального кватернионного маятника оказывается эквивалентной инерциальной динамике ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе (теорема 9, п.15). При этом функция общего решения $exp\, \zeta(s, \Delta_{12}(q))$ уравнений (1) – (2) представляет канонический потенциал автоуправления такой стабилизацией для случая изотропной инвариантности оси вращения ротора и является потенциалом канонического функционального кватернионного самосопряжения.

Такая механическая интерпретация уравнений (1) – (2) естественным образом при «N - многозвенном обобщении» ведет к механическому смыслу *экспоненты* дзета-функции Римана как гамильтониана бесконечно-звенного маятника: (см. также [1]).

$$H_\infty = exp\,\zeta(s) = exp\,\zeta\left(s|(\frac{1}{2}+t), \Delta_{12}^{\otimes(N\to\infty)}(q)\right),$$

где операция $\otimes(N \to \infty)$ является:

- канонической аффинной координатой («каноническим аналитическим классом») на отображении – тензорной степени корректного глобального (однокартного) упорядоченного изоморфизма $T\mathbb{S}^3(\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{R})$. При $N = 1$ получается гамильтониан функционального кватернионного маятника;
- полным аффинным пересечением непрерывных $SO(3)$-поворотов (представляемых эквивариантными операторами Гекке, ассоциированными с канонической решеткой на упорядоченном изоморфизме $T\mathbb{S}^3(\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{R})$, см. пп. 27, 28);
- канонической координатой на равномерном вращении ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе.

Модели и параметры колебаний функционального кватернионного маятника приводятся в формулировках утверждений пп. 5, 8, включая фундаментальную механическую модель инерциальной динамики ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе.

Отметим, что модель функционального кватернионного маятника для описания уравнений (1) – (2) возникла здесь в контексте поиска динамического расширения важной для приложений геометрической модели непрерывной аппроксимации группы $SO(3)$, основанной на динамическом анализе правильных многогранников и представленной в докладе [5].

Отметим, что всюду далее рассматривается аффинное время $\mathbb{C}$ и (или) $\mathbb{R}$ (формальное, классическое время). Все далее рассматриваемые структуры (пространства, отображения) предполагаются определенными над этим временем, если это не оговаривается отдельно.

7. Необходимость «жесткой фазовой» коррекции аффинной классики

Вместе с тем, общее решение уравнений (1) – (2) в виде специальной функции $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ не может быть получено на основе классических рассмотрений. Действительно, структура уравнений Эйлера-Пуассона в классическом контексте опирается на общепринятую аффинную структуру пространства-времени (т.е., определенную над множествами $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, открытыми относительно классической топологии обычного архимедова нормирования), представляемого в нашем случае расширением классическим аффинным временем конфигурационного пространства этих уравнений (пространства направляющих косинусов волчков).

Поэтому данные гамильтоновы уравнения только *локально* (над *аффинным* вещественным временем, открытым в классической топологии) параметризуют соответствующий им фазовый поток в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma}, \vec{\omega})$ (пространстве «направляющие косинусы – угловые скорости»).

Таким образом, классическое рассмотрение уравнений Эйлера-Пуассона использует «локальную» *безразмерную* (*аффинную*) *параметризацию* исходного заведомо *нелокального* (*размерного*) физического явления – реальной *размерной динамики* массивных волчков в физическом (реальном) времени.

Это классическое аффинное описание не вполне корректно и с математической точки зрения потому, что *аффинная параметризация* фазовых траекторий уравнений Эйлера-Пуассона *не полностью учитывает их инвариантность относительно отображения инволюции, индуцированного аналитическим отображением зеркальной симметрии над формальным аффинным временем фазового потока данных уравнений.*

Классическая аффинная параметризация *учитывает аффинную однородную инвариантность уравнений* (1) – (2), но *не учитывает их аффинную изотропную инвариантность*.

Оказывается, эта фундаментальная *аналитически инволютивная инвариантность* классического гамильтониана уравнений (1) – (2) *влечет компактность каждой фазовой траектории уравнений Эйлера-Пуассона*, противоречащую ее классической аффинной параметризуемости.

Действительно, орбитами этой аналитической инволюции (в $SO(3)$-модели) являются орбиты аналитической фазовой монодромии сопровождающих волчки правильных тетраэдров с центрами в точках закрепления (т. е., движение волчка находится во взаимнооднозначном соответствии с жестко связанным с ним таким тетраэдром. Его конформная модель оказывается «сопровождающим Галуа-гироскопом Джанибекова», см. пп.33-34).

Данные орбиты имеют индуцированную инволюцией обратимости периодическую тензорнозначную структуру на монодромных образах сопровождающего тетраэдра и, следовательно, являются компактными относительно классической аффинной топологии.

Контролирующим механическим смыслом этой компактности оказывается итоговый нетривиальный *компактный автоколебательный маятниковый характер динамики с конечным числом степеней свободы*, определяемый уравнениями (1) – (2).

Данная динамика действительно имеет «минимальную маятниковую модель»: это *аналитические колебания классического математического маятника*:

- *в зеркально обратимом времени*;
- *около его вертикального равновесия* (*это его классическое, нижнее, равновесие «по модулю зеркальной инволюции» обратимости по времени*).

В рамках физической терминологии такой маятник – канонический ***аналитический математический маятник***, представляющий динамику классического (однородного) маятника относительно изотропного (вращательного) расширения систем отсчета для описания его движения в аффинном трехмерии.

Удивительно, что уравнения движения такого маятника оказываются эквивалентными уравнениям Ковалевской для найденного ею случая, найденными ею еще в 1888 году.

Факт компактности фазовых траекторий связан с пропускаемой классикой, но кажущейся достаточно прозрачной, нормировкой вращающихся твердых тел «аналитической монодромией сопровождающего тетраэдра» в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ уравнений (1) – (2). Эта нормирующая пространство $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ тетраэдральная динамика является прообразом отображения зеркальной инволюции симметрии обратимости по аффинному времени.

Образ действия этой зеркальной инволюции на фазовом пространстве уравнений (1) – (2), собственно, сам $\mathbb{Z}_2$-инвариантен и, следовательно, с необходимостью компактен. При этом этот образ – вектор кинетического момента сопровождающего тетраэдра.

Прообраз этого $\mathbb{Z}_2$-действия, как следует из его транзитивности, также компактен – это указанная тетраэдральная монодромия.

Классика пропускает индуцированное действие зеркальной инволюции на сопровождающие волчки тетраэдры – монодромию универсального сопровождающего тетраэдра (*это его каноническое аналитическое функциональное 2-листное накрытие самого себя*), *что далее индуцирует исключение из области определения исходных уравнений* (1) – (2) *сущностно* (*физически*) *присутствующих объектов*:

- *точек закрепления волчков – центров сопровождающих их тетраэдров*;

- *прямых, содержащих вектора угловой скорости и, соответственно, кинетического момента сопровождающих тетраэдров, так как эти прямые с необходимостью содержат точку закрепления.*

Таким образом, пропуск «всего одной точки» области определения индуцирует физическую потерю «твердотельности» волчков (потерю «фазовой жесткости» фазового потока). Исходные уравнения теряют базовый механический смысл и, соответственно, возникает необходимость математической коррекции классических конструкций и выводов.

Более того, важно подчеркнуть, что *некомпактность в классике доминирует*: например, для классических интегрируемых случаев (в смысле Лиувилля-Арнольда) *множество некомпактных «квазипериодических фазовых траекторий» имеет полную меру* в классическом фазовом пространстве с классической архимедовой метрикой.

Вместе с тем, *фазовые траектории уравнений* (1) – (2), *в итоге, канонически компактны:* они изоморфны канонически (модулярно) параметризованным эллиптическим кривым с рациональными коэффициентами (компактным абелевым многообразиям рода 1), графики которых как раз и представляются орбитами сопровождающих тетраэдров.

Орбиты сопровождающих волчки тетраэдров являются орбитами эквивалентных отображений автодуальности над $\mathbb{C}$-временем корректно определенных функциональных решеток – орбитами функциональной кватернионной экспоненты (см. теорему 2, п.14), эквивалентной отображениям:

- *центральной симметрии в* $5d$*-евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C})$;
- *автодуальности потока больших* ***ко****кругов на* $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
- *автодуальности потока больших кругов на* $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$.

Поэтому становятся понятными как невозможность из «почти всюду» некомпактной классики увидеть «точную разрешимость», так и сформированное устойчивое мнение «о неразрешимости» рассматриваемых уравнений, аргументированное в рамках КАМ-теории.

8. Изотропная коррекция аффинно однородной классики

В контексте восстановления корректной структуры фазового пространства *идея* предлагаемого подхода к непосредственному решению уравнений Эйлера-Пуассона (в самом обычном смысле нахождения их общего решения) *состоит именно в использовании такой «эквивариантной зеркальной» компактификации* их классического (аффинного) фазового пространства, приводящей к «фазовой жесткости» (*эквивариантность* означает согласованность с фазовым потоком исходных уравнений).

И именно *такая фазовая жесткость* («односвязная гироскопичность») позволяет свести задачу к случаю одной (глобально аналитической) степени свободы и, тем самым, проинтегрировать исходные сильно нелинейные уравнения.

Другими словами, уравнения Эйлера-Пуассона описывают вращение *фазово твердого тела* (*это изометрии функционального непрерывного* $3d$*-пространства Лобачевского*, см. [1]) *вокруг фазово неподвижной – эквивариантно неподвижной – точки* (*его релятивистского центра в этом пространстве Лобачевского*), кардинально отличающимся во всех аспектах от классического $SO(3)$-твердотельного вращения.

Контролирующим *динамическим образом для фазовой линеаризации* уравнений (1) – (2) служит *эквивариантное двулистное* (*функциональное*) накрытие канонической диагонали фазового пространства этих уравнений самой себя посредством инволюции обратимости. Данная диагональ в аффинном представлении является сепаратрисой в фазовом пространстве волчка Эйлера.

Инволюция обратимости по времени уравнений (1) – (2) *аналитически функционально* (*представдяется пространством сходящихся рядов над* $\mathbb{C}$) *и алгебраически жестко* (*конечнопорожденно и Галуа-разрешимо*) *компактифицирует аффинную билинейную двояко-асимптотическую динамику на ней, представляя канонический функциональный прямолинейный поток на* $3d$*-бутылке Клейна* (*плоском функциональном многообразии*) – отображении канонической *глобальной* (*однокартной*) аналитической параметризации группы $SO(3)$. По сути – это *глобальная изотропная коррекция классической однородной структуры группы* $SO(3)$.

Для весьма контрастного сравнения с классикой отметим, что *одна из аффинных проекций* этой функциональной конструкции – *классический хаотизирующий эффект* расщепления сепаратрисы классического описания динамики волчка Эйлера.

Такая эквивариантная функциональная зеркальная компактификация двояко-асимптотической («*канонически предкомпактной*») *динамики оказывается эквивалентной канонической линеаризации уравнений Эйлера-Пуассона на базе полностью симметризованного классического аффинного пространства-времени,* т. е. этого пространства, симметризованного по всем аффинным пространственным координатам и аффинному времени.

Соответствующие замены исходных аффинных переменных уравнений (1) – (2) (ими оказываются замены Ковалевской в ее случае интегрируемости, имеющие вполне очевидную *функциональную Галуа-структуру*) сводят рассматриваемые уравнения к системе с одной («эквивариантной маятниковой», «глобально аналитической», «функциональной кватернионной») степенью свободы, и они автоматически интегрируются. При этом важно, что *процедура симметризации является эквивариантной* – она не нарушает изначальной структуры этих уравнений.

Подчеркнем, что *областью определения такой симметризации* исходных аффинных переменных уравнений Эйлера-Пуассона *является отображение их симметрии по формальному аффинному времени.*

Заметим, что эта эквивариантная зеркальная симметрия (вслед за указанной выше *потраекторной компактификацией*) также индуцирует как компактификацию собственно исходного классического *аффинного времени* $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), так и (парадоксально выглядящую для классики) компактификацию всего фазового пространства, имеющую корни уже в скрытой квантовой природе исходных классических уравнений (см. п. 40).

И здесь важно отметить, что *топология эквивариантно компактифицированного классического аффинного времени нетривиальна* – она оказывается индуцированной специальной (эквивариантной) *функциональной адельной нормой на поле дробно-рациональных функций.* Алгебраическая нетривиальность этой *функциональной мероморфной нормы* компенсируется ее геометрической естественностью. Это каноническая норма на:

- центральном пучке прямых в четырехмерном евклидовом пространстве;
- отображении самодвойственности минимального четырехмерного симплекса – отображении платоновой самодвойственности $4d$-тетраэдра в $4d$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ (точнее двух $4d$-тетраэдров; они соответствуют, в итоге, случаям $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$-времени).

В итоге, обнаруживаемая естественная функциональная Галуа-структура зеркальной симметрии обратимости по времени исходных (сильно нелинейных) уравнений, эквивалентная канонической групповой структуре на пространстве функциональных кватернионов, приводит к их полной линеаризации и канонической точной разрешимости в специальных L-функциях.

Гипотеза, подчеркивающая роль зеркальной симметрии обратимости по времени, состоит в том, что динамика «функционального кватернионного») маятника (и соответственно, уравнений (1) – (2)), описывается сильно нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка – так называемым уравнением *PVI* (см. [6]), изначально возникшем в классификационном контексте теории аналитических дифференциальных уравнений, без привязки к физике и механике.

Переменные $x,\ t, x-t$ уравнения PVI можно интерпретировать как канонические аффинные координаты на упорядоченных классических зеркально-симметричных двояко-асимптотических траекториях и их двойственности, а само уравнение PVI – каноническая локальная координатизация этой упорядоченной зеркальной симметрии.

Фазовый поток «функционального кватернионного» маятника реализуется изоморфными потоками $4d$-сферического маятника и $4d$-гармонического осциллятора (см. теорему 11, п.15; а также п. 23), соответственно являющимися каноническими функциональными аналогами (расширениями) $4d$-сферического маятника и $4d$-гармонического осциллятора (предложен Е. А. Митюшовым).

Классический КАМ-хаос для уравнений Эйлера-Пуассона в рамках такой *коррекции, восстанавливающей эквивариантность классической аффинной фазовой динамики,* формально приобретает *виртуальную роль* – роль пространства *неканонических аффинных карт* на каноническом эквивариантном глобальном функциональном атласе отображения фазового потока рассматриваемых уравнений (моделируемого *односвязными* аналитическими автоморфизмами $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$).

Если встать на конструктивную точку зрения, то эта роль аналогична *промежуточной конструктивной роли* пространства пробных функций Л. Шварца для получения обобщенных функций (δ-функций).

Аналогия «Функциональный анализ – эквивариантная КАМ-теория» имеет вид:

$$\{\text{пробные шварцевы функции}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{потенциалы (возмущенные гамильтонианы)}\\ \text{аффинных КАМ} - \text{деформаций прямолинейных обмоток}\\ \text{торов слоения Лиувилля} - \text{Арнольда}\end{matrix}\right\};$$

$$\{\boldsymbol{\delta} - \text{функции}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{exp\, L(s,E/\mathbb{Q})} - \text{функции } \Leftrightarrow\\ \text{результат аналитического продолжения функций } L(s,E/\mathbb{Q})\\ \text{как эквивариантных пробных функций, имеющий смысл}\\ \text{эквивариантного (изотропного) усреднения «КАМ} - \text{деформаций» } \Leftrightarrow\\ \text{аналитические } \boldsymbol{\delta} - \text{функции } \Leftrightarrow\\ \text{градуированное «кувырковое движение» волчков (п. 33)}\end{matrix}\right\}.$$

Корректирующая аналогия «классическая КАМ-теория – эквивариантная КАМ-теория» имеет вид:

$$\{\ \text{ряды теории возмущений } \{H_0+\varepsilon H_1\}\ \}$$

$$\updownarrow$$

$$\{\ \text{ряды для } exp\ \zeta\big(s|t,\Delta_{12}(q)\big) - \text{функций }\}$$

$$\{\text{ малые знаменатели }\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{оси аналитических гироскопов –}\\ \text{орбиты однородно} - \text{изотропной симметризации}\\ \text{исходного аффинно однородного фазового потока}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{методы ускоренной сходимости}\\ \text{рядов классической теории возмущений}\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{преобразования Ковалевской } \Leftrightarrow\\ \text{приведение уравнений (1) – (2) к нормальной форме}\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{плоские локально} - \text{тривиальные}\\ \text{тороидальные расслоения Лиувилля} - \text{Арнольда (см. [7])}\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{классы орбит биективной}\\ \text{модулярной параметризации кривых } E/\mathbb{Q}\end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{глобальное расслоение фазового пространства}\\ \text{на классы эквивариантных странных аттракторов –}\\ \text{слоев функционального аналитического расслоения Хопфа}\\ 3d - \text{сферы с потенциалом } |(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2\}\\ \text{аналитического кватернионного сопряжения –}\\ 3d - \text{аналогом комплексных фракталов –}\\ \text{образов комплексной рекурсии с потенциалом } z \to z^2 + c\end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{глобальные расслоения Лиувилля} - \text{Арнольда}\\ \text{фазового пространства уравнений (1) – (2)}\end{matrix}\right\}$$

9. Геометрические модели интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона на простой функциональной алгебре $e_8(\mathbb{Q}(s))$

Конструктивизм эффекту точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона придает следующее принципиальное утверждение.

Утверждение 1. Конструктивная алгебраическая модель интегрируемости (точной разрешимости) уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем состоит в *их интегрируемости на коприсоединенном представлении функциональной коррекции «максимальной» исключительной алгебры* $e_8(\mathbb{C})$ – *функциональной алгебре* $e_8(\mathbb{Q}(s))$ (*аналитически* – односвязной мероморфной коррекции, *геометрически – канонической изотропной коррекции* $e_8(\mathbb{C})$) (определение *алгебры* $e_8(\mathbb{Q}(s))$ см. в п. 31).

Замечание. Парадоксальным образом данное утверждение описывает «всего лишь» колебания классического математического маятника вокруг его вертикального равновесия в $\mathbb{C}$-времени.

Схема доказательства. Доказательство структурируется следующим образом.

1) Функциональная алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$ представляет канонические координаты на изоморфизме касательного и нормального расслоений $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$: $T\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$. Данный изоморфизм каноничен и глобален: он определен в одной карте над $(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cup \infty$.

2) Система корней алгебры $e_8(\mathbb{Q}(s))$ эквивалентна канонической групповой триангуляции свободного большого круга на $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$: рассматриваемые корни являются генерирующими точками на этой триангуляции.

3) Система корней классической алгебры $e_8(\mathbb{C})$ является канонической декомпактификацией системы корней алгебры $e_8(\mathbb{Q}(s))$.

4) Изоморфизм $T\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ представляет фазовый поток уравнений (1) – (2) (см. пп. 22 – 25) как поток больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Приведем ряд геометрических интерпретаций этой функциональной алгебраической модели.

Термин «изотропность» означает, что алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$ представляет канонические координаты на канонической изотропной коррекции $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{R})$ – нормальном расслоении сферы $\mathbb{S}^3$ (это глобальное многообразие (супермногообразие), т.е. многообразие с однокартным атласом (суператласом)).

Функциональная алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$ имеет следующие геометрические реализации:

$\mathbb{S}^3$-реализация:

- канонические координаты на:
  - $3d$-сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – координаты на потоке больших *ко*кругов на $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - глобальной изотропной коррекции $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - канонической C^0-*ко*сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (канонической глобальной сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$),
  - стандартной функциональной сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;

$\mathbb{E}^5$-реализация:

- канонические *непрерывные*:
  - полярные координаты в $5d$-пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - сферо-конические координаты в $5d$-пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;

$\mathbb{S}^4$-реализация:

- канонические координаты на:
  - $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – координаты на потоке больших кругов на $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - глобальной однородной коррекции $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - канонической C^0-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (канонической глобальной сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$),

  - стандартной функциональной сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;

$\mathbb{H}$-реализация:

- канонические координаты на:
  - векторном пространстве функциональных кватернионов с канонической непрерывной Галуа-групповой структурой, индуцированной их реализацией как канонического непрерывного двулистного накрытия классических кватернионов,
  - каноническом пространстве функциональных кватернионов.

Данные реализации, в частности, означают, что уравнения Эйлера-Пуассона интегрируются на:

- центральном *копучке копрямых в копространстве – объекте, канонически двойственном к центральному пучку прямых в* $4d$*-пространстве* $\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, и имеющем механический смысл универсального пространства угловых скоростей для исходных уравнений *в обратимом времени*;
- центральном пучке прямых в $5\mathrm{d}$-пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- отображении канонической центральной симметрии в пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- функциональных кватернионах, изоморфных $4d$-сфере $\mathbb{S}^4_{C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с канонической групповой непрерывной структурой.

Таким образом, фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона допускает:

- эллиптическое представление «канонической производной изотропной сферой $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$»;
- плоское представление канонической односвязной производной центральной симметрией в $5d$-пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- параболическое представление «канонической производной однородной сферой $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$»;
- гиперболическое представление «каноническими производными функциональными кватернионами».

Таким образом, приведенные выше канонические функционально-алгебраическо-геометрические модели, а именно:

- изотропная (*четно-нечетно упорядоченная* центрально-симметричная) $\mathbb{S}^3$-модель;
- однородная (*канонически упорядоченная* центрально-симметричная) $\mathbb{S}^4$-модель

«возвращают точку закрепления» аналитических волчков в область определения исходных уравнений Эйлера-Пуассона. Это влечет необходимость соответствующей *функциональной и проективной* коррекции *исходной конечномерной симплектической* фазовой классики *проективным* и *функциональным* отображением зеркальной инволюции.

10. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона как фазовый поток функционального кватернионного маятника

Сначала приведем общее утверждение, лежащее в основе эффекта точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона и представляющее механическую модель фазовой жесткости их фазового потока. Данная модель демонстрирует физическую *гироскопическую суть* этих уравнений, индуцированную свойством их изотропной инвариантности, расширяющее классическое свойство их однородной инвариантности.

Дуализм изотропной и однородной инвариантности посредством зеркальной аналитической инволюции обратимости по формальному времени, перенормирующий классический фазовый поток, реализуется аналитическим аналогом механизма Хиггса (формальной модели генерации масс элементарных частиц) и математически эквивалентен генерации $3d$-изотропных δ-функций как решений функционального уравнения для дзета-функции $\zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big)$.

Введенное в п.1 пространство функциональных кватернионов можно интерпретировать как модель односвязного дуализма изотропной и однородной инвариантности уравнений (1) – (2). Поэтому $3d$-изотропные δ-функции можно считать корректно определяемыми *аналитическими кватернионными δ-функциями.*

Классические уравнения Эйлера-Пуассона, рассмотренные без учета зеркальной

$\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантности,

в этом контексте приобретают роль уравнений на пробные функции (это классические тета-функциональные решения) для изотропных δ-функций – роль аффинной карты на указанных функциональных уравнениях.

Утверждение 2. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона, описывающее аналитическую динамику вектора кинетического момента $\vec{M}$ аналитических волчков, представляет фазовую динамику универсального гироскопа (общего волчка), имеющую каноническую модель в виде фазовой динамики канонического функционального кватернионного маятника.

Данный гироскоп (маятник) имеет механическую модель в виде инерциальной динамики ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе (детализация – см. теорему 9, п.15).

Далее приводится детализация структуры такой динамики, раскрывающая ее каноническую дуальную маятниково-осцилляторную природу.

Теорема 1. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона имеет следующие геометрические реализации:

$\mathbb{S}^3$-реализация:

- каноническая аналитическая структура на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (конфигурационном пространстве) – метрика на пространстве односвязных $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитических автоморфизмов $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (это каноническая однородно-изотропная структура на $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$);
- каноническая координатизация канонического $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитического (инерциального) качения геометрической точки по стандартной $3d$-*ко*сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

$\mathbb{S}^4$-реализация:

- каноническая аналитическая структура на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (конфигурационном пространстве) – метрика на пространстве односвязных аналитических автоморфизмов $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (это каноническая Галуа-симметрийно однородная структура на $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$);
- каноническая односвязная однородность потока больших кругов на $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$);
- каноническая координатизация канонического аналитического (инерциального) качения геометрической точки по стандартной $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

$\mathbb{H}$-реализация:

- каноническая аналитическая групповая структура на односвязной компактификации тела классических кватернионов (мера некоммутативности этой структуры – собственно аналитические волчки).

Данные гамильтоновы динамические системы представляют:

- канонический *аналитический поток больших <u>кокругов</u>* на сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, являющийся орбитой канонического аналитического накрытия сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ инволюцией зеркальной обратимости по времени уравнений (1) – (2);
- канонический аналитический поток больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, являющийся орбитой канонического аналитического накрытия сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ инволюцией зеркальной обратимости по времени уравнений (1) – (2).

Гамильтонианы данных систем имеют следующий канонический вид в исходных переменных уравнений (1) – (2):

- $H_{E-P,\mathbb{C}|\mathbb{R}} = |(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2$ над $\mathbb{C}$-временем – потенциал:
    - канонического аналитического сопряжения на теле $\mathbb{H}$ классических кватернионов: $Q \to \overline{Q}$, где $Q \in \mathbb{H}$,
    - канонического сопряжения на теле функциональных кватернионов;
- $H_{E-P,\mathbb{R}} = |(\omega_1 + i\omega_2)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2$ над $\mathbb{R}$-временем – потенциал:
    - канонического аналитического самосопряжения на вещественных $Re\mathbb{H}$ кватернионах: $ReQ \leftrightarrow Re\overline{Q}$, где $Q \in \mathbb{H}$,
    - канонического самосопряжения на функциональных вещественных кватернионах.

При этом, большие *ко*круги на сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с односвязной аналитической топологией являются линиями уровня канонической $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитической *супер*метрики (конфигурационно-импульсного спаривания)

$$exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)$$

- на функциональном пространстве больших *ко*кругов на сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- на пространстве функциональных кватернионов,

представляющей потенциал канонической глобальной двойственности касательного и *ко*касательного (нормального) расслоений сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, имеющих симметрическую (однородную) и кососимметрическую (изотропную) тензорную структуру соответственно.

Ключевым аспектом точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона является их *аналитический класс гладкости*, индуцирующий не только геометрическую и физическую однородность, но *и каноническую изотропность* их фазового потока.

11. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона: канонические аналитические обобщенные функции

На классические уравнения (1) – (2) можно смотреть как на дифференциальные уравнения, определяющие <u>*новый класс специальных обобщенных функций*</u>, представляющих их общее решение (см. [1]). В целом, его можно охарактеризовать как <u>*класс аналитических δ-функций, представляющих универсальную обобщенную аналитическую δ-функцию*</u> $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ <u>*в виде функционального комплекса*</u>.

Механический смысл канонической модулярной автоморфной формы веса 12 – *функции* $\Delta_{12}(q)$:

- каноническая угловая координата для:
    - классического математического маятника *в обратимом времени,*
    - универсального (общего) волчка уравнений Эйлера-Пуассона;
- канонический аффинный потенциал:
    - зеркальной инволюции обратимости для уравнений Эйлера-Пуассона,
    - зеркальной симметрии их фазового потока;

- канонический аффинный атлас на:
    - сепаратрисе фазовой динамики классического математического маятника *в обратимом времени,*
    - сепаратрисе волчка Эйлера.

Динамический смысл *функции* $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ – потенциал:

- самодвойственной *би*асимптотической динамики:
    - классического математического маятника *в обратимом времени* (т.е. эквивариантной непрерывной компактификации этой динамики),
    - волчка Эйлера *в обратимом времени* (его «двояко-асимптотической» сепаратрисной динамики);
- фазового потока кинематических уравнений Пуассона (уравнений (2)).

Механический смысл функции $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ – это кинетическая энергия/амплитуда:

- канонического аналитического математического маятника;
- классического математического маятника, *аналитически обратимого по времени*;
- канонического функционального маятника;
- функционального кватернионного маятника;
- трехмерного математического маятника *в обратимом времени* (аналитического маятника Уитни);
- универсального волчка (гироскопа).

12. Типы маятниковых интерпретаций уравнений Эйлера-Пуассона

В рамках различной математической, механической и физической терминологии возможны различные интерпретирующие названия такой динамической системы как «*аналитический математический маятник*». Каждая из таких интерпретаций является мостом между механикой и соответствующей областью. Аналитическая маятниковая калибровка, опирающаяся на вертикальное равновесие классического маятника, находит свои аналоги в смежных областях.

Наиболее осмысленным в контексте уравнений Эйлера-Пуассона, наряду с названиями «аналитический математический маятник» и «функциональный маятник», является название «функциональный кватернионный маятник» (см. п. 1). Также, по сути эквивалентные названия, например, следующие:

- *изотропный маятник* – колебания *сферического аналитического маятника* в аффинном представлении с конфигурационным пространством в виде $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ (*эллиптико-гиперболическое представление аналитического маятника*). Фазовый поток *изотропного* маятника является каноническим сечением глобального упорядоченного изоморфизма $T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- *однородный маятник* – колебания *сферического аналитического маятника* в глобальном (однокартном) представлении с конфигурационным пространством в виде $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ (*параболическое представление аналитического маятника*). Фазовый поток *однородного* маятника является каноническим сечением глобального изоморфизма $T\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- *модулярный* q-*маятник* (*коническое представление аналитического маятника*), где q - канонический аффинный аргумент модулярной автоморфной формы $\Delta_{12}(q)$, играющей роль:
    - канонической угловой переменной обратимого по времени математического маятника (детальнее см. п.23),
    - единой канонической аффинной координаты на пространстве угловых скоростей аналитических волчков;

- *мероморфный маятник* (*гиперболическое представление аналитического маятника*): метрика на его области определения имеет вид канонических конечных аделей на поле дробно-рациональных функций с естественным условием фазовой односвязности (*гиперболическое представление аналитического маятника*).

Для различных аспектов анализа исходных уравнений Эйлера-Пуассона с 12-ю аффинными «степенями свободы» (6-ть аффинных кинематических переменных + 6-ть аффинных параметров) могут быть использованы следующие эквивалентные термины, отражающие существенно маятниковый автоколебательный характер их динамики:

- модулярный q-маятник;
- *аналитический* математический маятник (глобально аналитический маятник);
- функциональный маятник;
- функциональный кватернионный маятник;
- изотропный математический маятник;
- *аналитический супер*маятник;
- односвязный мероморфный адельный маятник;
- *аналитический* маятник Уитни;
- канонический $4d$-маятник.

В рамках этой терминологии фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона эквивалентно представляется следующими гамильтоновыми системами:

- колебаниями:
  - канонического глобально аналитического маятника,
  - классического математического маятника около вертикального равновесия,
  - канонического аналитического маятника;
- колебаниями *аналитического* маятника Уитни – канонического трехмерного математического маятника (аналитической гамильтоновой системы с аффинно трехмерным конфигурационным пространством) *в обратимом времени*;
- суперколебаниями математического *аналитического супер*маятника;
- колебаниями модулярного q-маятника – гамильтоновой системы, полученной из классического маятника *аффинно обратимой заменой времени* $t \rightarrow \Delta_{12}(q)$;
- колебаниями канонического однозвенного «аналитического адельного» маятника:
  - колебаниями классического математического маятника около вертикального равновесия, рассмотренными в обратимом $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-времени с аддитивно-мультипликативным упорядочением групповых структур на $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ и индуцирующим описание его аналитического продолжения динамики в вертикальное равновесие (в точку закрепления);
  - *аналитические односвязные адели* определяются как канонические координаты на теоретико-множественном представлении *односвязной компактификации би*асимптотического движения классического маятника (см. [1]);
- каноническим универсальным усреднением общего аналитического возмущения динамики классического математического маятника;
- модами колебаний модулярного q-маятника (*коническое представление*);
- модами колебаний аналитического *супер*маятника (*эллиптико-гиперболическое представление*): *типами супер*выходов из *супер*равновесия аналитического *супер*маятника;
- модами колебаний функционального маятника/функционального кватернионного маятника (*гиперболо-эллиптическое представление*).

13. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона как фазовый поток модулярного q-маятника

Классический математический маятник имеет каноническую аналитическую структуру фазового потока. Эта структура индуцирована аналитической зеркальной инволюцией по формальному времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ его гамильтониана. Структура образа этой фундаментальной инволюции оказывается нетривиальной и базируется на канонической модулярной автоморфной форме $\Delta_{12}(q)$ веса 12.

В контексте соответствующих вычислений (см. п. 27) естественным образом возникает следующее определение.

Определение. Классический математический маятник, фазовый поток которого инвариантен относительно аналитической зеркальной инволюции по формальному времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$, назовем ***модулярным q-маятником*** – по аргументу канонического потенциала аффинной обратимости по времени для уравнений (1) – (2), представляемого формой $\Delta_{12}(q)$.

В данный момент пока не будем обсуждать точную связь его параметров и характеристик со введенным функциональным кватернионным маятником, также эквивалентным каноническому аналитическому математическому маятнику (см. п.1).

Динамический смысл функции $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$: «прямолинейная обмотка формы $\Delta_{12}(q)$» – точный функциональный аналог «прямолинейной обмотки конечномерных лиувиллевых торов» в классической теореме Лиувилля-Арнольда.

Механический смысл δ-функции $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ – полная фазовая («энергия фазово когерентного – *фазово твердотельного ансамбля*») энергия («статистический гамильтониан ансамбля фазовых состояний») *канонического глобально аналитического математического маятника*.

Физическим смыслом *аналитических* (*изотропных, функциональных кватернионных*) *δ-функций* – канонических циклов *δ-функции* $exp\ \zeta(s, \Delta_{12}(q))$ являются:

- моды колебаний модулярного q-маятника;
- моды колебаний функционального кватернионного q-маятника;
- моды колебаний аналитического трехмерного математического маятника;
- моды канонического изотропного гармонического осциллятора (см. теорему 11, п.15);
- типы канонического односвязного изотропного (функционального кватернионного) расширения классической δ-функции Дирака – изотропные (функциональные кватернионные) δ-функции;
- бимодулярные δ-функции (сечения производной бимодулярной параметризации, см. п.15);
- аналитические односвязные *супер* δ-функции;
- аналитические гироскопы как канонические трехмерные физически размерные односвязные δ-функции (гипотеза по модулю доказательства теоремы 9).

Использование термина «*аналитическая»* δ-функция *обусловлено аффинно аналитическим классом гладкости* (*а не бесконечно дифференцируемым классом* C^{∞}) *пробных шварцевых функций, ее формирующих*.

Роль таких *эквивариантных пробных функций* играют *функции Хассе-Вейля* $L(s|t, E/\mathbb{Q})$), *организованные в комплексы* (*когомологии классов изогенности кривых* $E/\mathbb{Q}$) *и имеющие функцию* $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ *в качестве «универсального потенциала комплекса эквивариантных аналитических пробных шварцевых функций»*. *Можно считать, что роль нулевого значения эквивариантных пробных функций в* $s|t = \infty$ *играют их вычеты в* $s|t = 1$ – *граничные условия канонического фактор-группового самоподобия* $3d$*-сферы* (трехмерная спиральная Sp_{3d}-модель в [1]).

Аналитическая структура вычетов $Res_{s=1}L(s|t,E/\mathbb{Q})$ крайне нетривиальна и, как известно, регулируется известной гипотезой Берча-Свиннертона-Дайера (см. [4]).

В этом контексте *функция* $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ *является универсальной эквивариантной аффинной* $\mathbb{C}$-*аналитической функцией.*

Кинематические уравнения Пуассона (уравнения (2)) являются уравнениями на структуру пространства эквивариантных пробных функций и в этом смысле представляют канонические граничные условия для динамических уравнений (1) – (2), приобретающих смысл корректной краевой задачи.

В этом контексте ***модулярный q-маятник является каноническим функциональным*** математическим маятником.

С нашей точки зрения (см. п.1), именно каноническая групповая эквивариантная *L-функциональная структура* динамики модулярного q-маятника приводит к корректному моделированию *физически размерной структуры* динамики вращений тяжелых волчков, в свою очередь, моделируемой уравнениями Эйлера-Пуассона.

14. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона: математический аспект

В монографии [1] приведены подробные доказательства следующих утверждений, а единая схема их доказательств приведена в пп. 26, 27. Здесь дополнительно усиливается фокусировка на каноничность и синтетичность эффекта точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона.

Основополагающее утверждение описывает аналитическую структуру их общего решения как каноническую функциональную кватернионную экспоненту (каноническую функциональную экспоненту).

Теорема 2. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона аналитически представляет односвязную экспоненту сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ как отображение фазового потока колебаний глобально аналитического математического маятника и геометрически реализуемую каноническим односвязным аналитическим функциональным расслоением Хопфа сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – канонической аналитической структурой на сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$:

$$\vec{M}(s|t) = exp\,\zeta\left(s|(\tfrac{1}{2}+it),\Delta_{12}(q)\right) = exp\,\mathbb{S}^3\,(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \{\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \xrightarrow{exp\,\mathbb{S}^1_{big}(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \mathbb{S}^2(\mathbb{C}|\mathbb{R})\},$$

где

- $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ – дзета-функция канонической (единственной) параболической формы веса 12 (ее определение см. в п.24);
- $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ – обозначение представления поля $\mathbb{C}$ комплексом относительно естественного вложения $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
- $s|(\frac{1}{2}+it)$ – канонический аффинный координатный комплекс на числовом комплексе $\mathbb{C}|\mathbb{R}[\frac{1}{2}+it]$, представляющем каноническую аффинную координату на топологическом комплексе. Сфера $\mathbb{S}^2(\mathbb{C}|\mathbb{R})$|«большой круг | большой круг» на сфере $\mathbb{S}^2(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- $exp\,\zeta\left(s|(\frac{1}{2}+it),\Delta_{12}(q)\right) = exp\,\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – корректное определенное равенство в силу скрытой эквивариантной $3d$-векторнозначной структуры функции $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ – аффинно $3d$-значной *авто*рекурсивной групповой структуры на ее нулях (см. теорему 3), индуцированной *групповым отображением автоитерации глобального изоморфизма* $T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ как раз с потенциалом $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$.

Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона имеет следующие интерпретации:

- потенциал *общего* (*универсального*) $(\mathbb{C}|\mathbb{R})$-*аналитического* качения стандартного геометрического $3d$-шара по евклидову $3d$-пространству $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (условие *«общей аналитичности»* индуцирует условия жесткой «специальной $(\vec{\gamma}-\vec{\omega})$-периодичности» такого «общего» качения);
- потенциал *общего аналитического* поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (вложенной в $4d$-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с фиксированным центром O) вокруг центра O (условие *«общей аналитичности»* индуцирует жесткую специальность параметров «общего» поворота);

- ***потенциал колебаний канонического аналитического маятника***;

- ***каноническая функциональная экспонента***.

Замечание. Формула $\vec{M}(s|t) = exp\,\zeta\left(s|(\frac{1}{2}+it), \Delta_{12}(q)\right)$ синтезирует (допускает внутреннюю $\mathbb{Z}_3$-градуировку) эллиптическое, параболическое (соответствует аргументу $(\frac{1}{2}+it)$) и гиперболическое представление для фазового потока уравнений (1) – (2) (см. п.22).

Теорема 3. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона, с учетом эквивариантных начальных условий, представляет каноническую *рекурсивно перечислимую динамику* колебаний глобально аналитического маятника (модулярного q-маятника) и имеет следующий функционально-арифметический вид, координатизирующий:

- общий аналитический поворот $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ вокруг ее центра (расположенного в $4d$-пространстве $\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$) в аффинных координатах $s|(\frac{1}{2}+it)$ на множестве $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ (формальном времени) – локальных координатах на ее больших *ко*кругах;
- эквивариантное расслоение Хопфа $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ как групповой *авто*рекурсивный комплекс (рекурсия, его порождающая, самосопряжена в групповом смысле):

$$\vec{M}(s|t, s_0|t_0) = exp\,(\zeta(s|t, \Delta_{12}(q))(\zeta(s|t, \Delta_{12}(q)) = 0)_{nontriv}\,(mod\,3))),$$

где

$$\{\mathbb{S}^3[exp\,(\zeta_{eq}(s|t)] \xrightarrow{exp(\mathbb{S}^1_{big}|\mathbb{S}^0_{big})[\zeta_{eq}(s|t)=const]} \mathbb{S}^2_{big}[(\zeta_{eq}(s|t) = 0)_{nontriv}]\}.$$

а $\zeta_{eq}(s|t) = \zeta(s|(\frac{1}{2}+it), \Delta_{12}(q))$ – обозначение свойства эквивариантности данной дзета-функции;

$(\zeta(s|(\frac{1}{2}+it), \Delta_{12}(q) = 0)_{nontriv}\,(mod\,3)$ – нетривиальные нули функции $\zeta(s|t, \Delta_{12}(q))$, являющиеся:

- рекурсивно упорядоченными по $mod\,3$ (начиная с 1-го нетривиального нуля). Отметим, что данное упорядочение индуцировано групповым законом на универсальной кривой $E/\mathbb{Q}$ (см. [1]) и имеет фактор-структуру *групповой авторекурсии*;
- $3d$-векторнозначными периодами отображения $s|t \to \vec{M}(s|t)$;
- генерирующими точками $\mathbb{S}^0_{big} \cong generator\,\mathbb{S}^1_{big}$ больших кокругов $\mathbb{S}^1_{big}$на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- каноническими начальными условиями *общего непрерывного* поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона с начальными условиями имеет следующие интерпретации:

- потенциал односвязного аналитического расслоения Хопфа $\mathbb{S}^3_{Hopf,an}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (обозначение) $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ *с выделенным слоем*;
- потенциал *общего* (*универсального*) *аналитического* качения стандартного геометрического $3d$-шара по евклидову $3d$-пространству *с выделенными начальными условиями*;
- потенциал *общего аналитического* поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ *относительно выделенной системы отсчета*;
- потенциал упорядоченных автоколебаний глобально аналитического маятника (q-маятника).

Замечание. Из теоремы 1 (структура общего интеграла) и теоремы 3 (авторекурсивная структура общего решения) следует, что фазовые траектории уравнений Эйлера-Пуассона имеют структуру конфигурационно трехмерных аналогов фрактальных структур – образов классической комплексной рекурсии с потенциалом $z \to z^2 + c$.

Теорема 4. Частные решения уравнений Эйлера-Пуассона представляют подкомплексы его общего решения, рассмотренного как функциональный CW-комплекс, образуют полное пространство мод колебаний модулярного q-маятника (*коническое представление*) и имеют следующее функционально-арифметическое представление:

$$(\vec{M}(s|t, s_0|t_0))_{CW} = exp\, L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}))(L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}) = 0)_{nontriv}\ (mod\ 3)),$$

где

- $(\vec{M}(s|t, s_0|t_0))_{CW}$ – корректно определенный функциональный CW-комплекс;
- $E/\mathbb{Q}$ – эллиптические кривые с рациональными коэффициентами;
- $\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$ – дзета-функции кривых $E/\mathbb{Q}$;
- $L(s|t, E/\mathbb{Q})$ – L-функции Хассе-Вейля кривых $E/\mathbb{Q}$;
- $L|\zeta$ – обозначение комплекса отображений, корректно определенного в силу точности (наличия нулевого ядра) отображений вложений $\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}) \to L(s|t, E/\mathbb{Q})$ (детали см. в [1]).

С целью демонстрации целостности эффекта точной разрешимости уравнений (1) – (2) анонсируем утверждения, по сути подготовленные в [1] к приводимым ниже формулировкам.

Теорема 5. Уравнения Эйлера-Пуассона над аффинным временем $\mathbb{C}$ интегрируются на коприсоединенном представлении *мероморфного расширения* $e_8(\mathbb{Q}(s))$ простой исключительной алгебры Ли $e_8(\mathbb{C})$, *определяющие условия* для которого описаны в п. 31. (см. также [1], с.459).

Теорема 6. Частные решения уравнений Эйлера-Пуассона над временем $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ представляют конечнопорожденную иерархию (конечное упорядоченное множество классов) пространства циклов потенциала универсального (общего) аналитического поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, реализующего эквивариантное аналитическое (глобальное, однокартное) продолжение ее локальных вращений в евклидовом $4d$-пространстве $\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Общее глобальное вращение $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ реализуется, индуцируя полную линеаризацию уравнений Эйлера-Пуассона в канонической модели $4d$-мерного евклидова пространства и имеет следующие геометрические модели:

Вещественная модель:

- область определения – евклидово пространство $\mathbb{E}^{20}(\mathbb{R})$ для формального времени $s|t \in \mathbb{R}$;
- область значений – изоморфизм полной линеаризации фазового потока уравнений (1) – (2) (см. [1] с.242) над $\mathbb{R}$-временем:

$$\vec{M}(t) \cong exp\, \mathbb{S}^3(\mathbb{R}) \cong SO(20, \mathbb{R}).$$

Комплексная модель:

- область определения – евклидово пространство $\mathbb{E}^{281}(\mathbb{R})$ для формального времени $s|t \in \mathbb{C}$;
- область значений – изоморфизм полной линеаризации фазового потока уравнений (1) – (2) над $\mathbb{C}$-временем:

$$\vec{M}(s) \cong exp\, \mathbb{S}^3(\mathbb{C}) \cong SO(281, \mathbb{R}).$$

15. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона: физический и механический аспект

Теорема 7 (Физический релятивистский аспект: производная СТО). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона представляет канонические координаты на *аналитически релятивистском* ($[c, c]$-инвариантном) геометрическом $3d$-шаре, т.е. инвариантном относительно $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитических систем отсчета – орбите отображения общей монодромии свободного вектора скорости света c в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Теорема 8 (Небесно-механический аспект). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-временем имеет следующие механические интерпретации ([1]):

- тяжелый однородный $3d$-шар, $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-*аналитически* стоящий на неподвижной точке в плоско-параллельном поле гравитации («он вертикально удваивается» над формальным $\mathbb{C}$-временем);
- шаровой гравитационный монополь (над $\mathbb{R}$-временем), шаровой гравитационный диполь (над $\mathbb{C}$-временем).

Где шаровой гравитационный монополь:

  - орбита канонической самодвойственности (аналитического механизма Хиггса) потока больших кокругов $3d$-сферы,
  - орбита канонической самодвойственности потока больших кругов $4d$-сферы,
  - орбита канонической односвязной двойственности «однородность-изотропность» в классическом пространстве времени;

- модельный потенциал для гравитационного шарового диполя|монополя (см. п.35);

- $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-*однородно-изотропный шар – это эквивариантно двойственная пара*:
  - *геометрический* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-*однородный* $3d$-шар с центром в свободной точке трехмерного физического пространства,
  - геометрически $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-*изотропное* (а не только однородное, как в классике) поле гравитации шара,
  - эквивариантная двойственность однородного и изоторопного шаров индуцирует:
    - каноническое $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитическое вращение шара вокруг флага «центр - ось - плоскость»,
    - каноническую $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитическую гомотетию шара;
    - собственно самодвойственную пару «массивный $3d$-шар ⟷ его гравитационное поле».

Теорема 9 (Классико-механический аспект). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-временем имеет следующие механические интерпретации ([1]):

- *релятивистский гироскоп*: инерциальная динамика классического гироскопа в трехмерном функциональном $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитическом пространстве Лобачевского (модели физического пространства);

- *инерциальная динамика ротора в трехмерном физическом пространстве в полностью стабилизированном кардановом подвесе* (соответствующее определение см. в [8]).

При этом имеются следующие соответствия механической структуры (в кардановом подвесе – сокращенно КП) и аффинной аналитической структуры общего решения:

$$\{\text{ ротор КП }\} \leftrightarrow \{\text{ критическая полоса для функции } \zeta(s|t, \Delta_{12}(q))\};$$

$$\{\text{ ось ротора КП}\} \leftrightarrow \{\text{ критическая прямая в критической полосе функции } \zeta(s|t, \Delta_{12}(q))\ \};$$

$$\{\text{ прямая } s = 0\ \} \leftrightarrow \{\text{ внутреннее кольцо КП }\};$$

$$\{\text{ прямая } s = 1\ \} \leftrightarrow \{\text{ внешнее кольцо КП }\}.$$

Теорема 10 (Аспект обратной краевой задачи). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона в эквивариантно обращенном групповом времени (времени обратной задачи), параметризующем изотропное описание их фазовой динамики (не тело вращается в пространстве, а пространство вращается вокруг тела) имеет вид:

$$\vec{M}(s|t) \cong ln\, \mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}),$$

который является:

- каноническим *обращением отображения* экспоненциальной структуры аналитического расслоения Хопфа $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (см. теоремы 2, 3);
- гиперболическим представлением фазового потока уравнений (1) – (2);
- отображением канонического аналитического качения геометрической точки по стандартной $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ по ее большим кругам.

Теорема 11 (Дуализм классического маятникового и квантово-механического осцилляторного описаний общего решения как эквивариантное AdS/CFT-соответствие (см. [9]). Дуализм «волчки-элементарные частицы»). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона имеет эквивалентные (изоморфные) классическую и квантово-механическую интерпретации), описывающие:

- колебания *однородно-изотропного* маятника (функционального кватернионного маятника, функционального маятника) около его канонического равновесия – общее аналитическое возмущение колебаний классического математического маятника с гамильтонианом H_{pend} с потенциалом, имеющим вид общего интеграла уравнений (1) – (2):

  $$H_{pend} = |(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

  записанным в канонических аффинных переменных, генерирующих фазовый поток общего аналитического возмущения в обратимом $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-времени, т.е. в переменных на динамике двойственных асимптотических движений (эквивалентно – в канонических координатах на компоненте гладкости фазового $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-потока на сепаратрисе). Динамика, соответствующая гамильтониану H_{pend} имеет вид:

  $$\vec{M}(s|t) = exp\, \mathbb{S}^3\ (\mathbb{C}|\mathbb{R})\ \text{(эллиптическое представление фазового потока).}$$

- колебания *однородно-изотропного* гармонического осциллятора (функционального кватернионного осциллятора, функционального осциллятора) около его канонического равновесия – общее аналитическое возмущение колебаний классического гармонического осциллятора с гамильтонианом H_{oscill}, имеющего вид общего решения уравнений (1) – (2):

  $$H_{oscill} = exp\, \zeta\left(s|(\frac{1}{2} + t), \Delta_{12}(q)\right),$$

в канонической аффинной внутренней переменной на обратимом $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-времени, и описываемые динамикой колебаний функционального (кватернионного) осциллятора; динамикой имеющей (в соответствии с теоремой 1, п.10) корректно определенный вид:

$$\vec{M}(s|t) \cong ln\,\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \text{ (гиперболическое представление фазового потока).}$$

Термин «изотропный» означает:

- условие *аналитической* ковариантности (аналитической $\vec{\omega}$-инвариантности, аналитической изотропности) уравнений Эйлера-Пуассона, эквивалентные условию их симметрии обратимости по времени;
- рассмотрение динамики уравнений (1) – (2) относительно всех непрерывных трансляций и всех непрерывных вращений в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ (в частности, относительно равномерно вращающихся систем отсчета).

16. Редукция уравнений Эйлера-Пуассона к системе с одной глобально аналитической степенью свободы – колебаниям q-маятника

Теоремы 2, 3 п.14 сводят фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона к фазовому потоку гамильтоновой системы с одной глобальной степенью свободы, имеющей афинное представление в виде автоморфной формы $\Delta_{12}(q)$. Вес 12 формы $\Delta_{12}(q)$ «модулярно» (однородно-изотропно) впитывает нелинейность уравнений (1) – (2) между их 6-ю независимыми аффинными переменными и 6-ю независимыми параметрами, «центрально» всех их симметризуя.

Корректно определенный дифференциал этой редукции фазового потока уравнений (1) – (2) представляется уравнениями Ковалевской.

Конфигурационно-импульсное пространство q-маятника:

- свободный диаметр сферы $\mathbb{S}^4$, естественно вложенной в касательное пространство $T_*\mathbb{S}^4$;
- кривая с уравнением:

$$y^2 = x(x - i_+)(x + i_\times),$$

где x, y – аффинные координаты на $\mathbb{C}$, $i_+ = i[\mathbb{C}_+]$, $i_\times = i[\mathbb{C}_\times]$. Эту кривую корректно интерпретировать как универсальную модулярную кривую для кривых $E/\mathbb{Q}$ (см.[1]).

Импульсно-конфигурационное пространство q-маятника:

- свободный диаметр сферы $\mathbb{S}^4$, естественно вложенной в кокасательное пространство $T^*\mathbb{S}^4$;
- универсальная эллиптическая кривая над полем $\mathbb{Q}$, параметризуемая универсальной модулярной кривой (определенной выше) – кривая с «операционно двойственным» уравнением (см. [1]):

$$y^2 = x(x - i_\times)(x + i_+).$$

Фазовое суперпространство: орбита биективного соответствия «бимодулярности» – *би*группового расширения классического свойства модулярности кривых $E/\mathbb{Q}$, имеющего вид параболического описания фазового потока уравнений (1) – (2):

$$\{\text{ «модулярные кривые»}\} \longleftrightarrow \{\text{ «эллиптические кривые } E/\mathbb{Q}\text{» }\};$$

$$\Updownarrow$$

$$\{\, y^2 = x(x - i_+)(x + i_\times)\} \Leftrightarrow \{\text{ диаметр сферы } \mathbb{S}^4\ \};$$

$$\{\ (T_*\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})) - \text{Галуа} - \text{selfduality}\ \} \Updownarrow \{\ \text{фазовый поток уравнений (2)}\ \}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\{\ y^2 = x(x - i_+)(x + i_\times)\} \Leftrightarrow \left\{\ \text{большая окружность } \mathbb{S}^1_{big}, \text{опирающаяся на диаметр } \mathbb{S}^4\ \right\}.$$

Фазовый поток q-маятника:

$$\vec{M}(s|t) = exp\,\zeta\left(s|(\frac{1}{2} + it), \Delta_{12}(q)\right) = exp\,\mathbb{S}^4\,(\mathbb{C}|\mathbb{R})|exp\,\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}),$$

где данное представление зависимости $\vec{M}(s|t)$ является параболической формой эллиптического представления, рассмотренного в теореме 2.

Орбита биективного соответствия производной «бимодулярности», имеет вид:

$$\left\{\begin{matrix} mod\mathbb{Z}_3 - \text{групповой закон на} \\ \{y^2 = x(x - i_+)(x + i_\times)\} \end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{\ mod\mathbb{Z}_3 - \text{групповой диаметр } \mathbb{S}^4\ \}$$

$$\{\ exp(T_*\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})) - \text{Галуа} - \text{selfduality}\ \} \Updownarrow \left\{\ \text{фазовый поток уравнений (1) – (2))}\ \right\}.$$

$$\left\{\begin{matrix} mod\mathbb{Z}_3 - \text{групповой закон на} \\ \{y^2 = x(x - i_+)(x + i_\times)\} \end{matrix}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{mod\mathbb{Z}_3 - \text{групповой кодиаметр } \mathbb{S}^4\ \}$$

Характеристики *изотропного маятника*

Напомним (п.15), что фазовый поток изотропного маятника является каноническим сечением упорядоченного изоморфизма $T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Дуальные характеристики колебаний для дуальной пары:

«изотропный маятник» ⟷ «изотропный осциллятор».

Амплитуда изотропного маятника:

- дополнительный интеграл волчка Эйлера – амплитуда колебаний изотропного маятника;
- $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ – амплитуда колебаний изотропного осциллятора.

Фаза изотропного маятника:

- дополнительный интеграл волчка Лагранжа – фаза колебаний изотропного маятника;
- $\zeta(1 - s, \Delta_{12}(q))$ – фаза колебаний изотропного осциллятора.

Моды изотропного маятника:

- классы модулярной параметризации (классы отображений параметризации модулярными кривыми $E/\mathbb{Q}$);
- классы логарифмической модулярной параметризации (классы обратных отображений к отображению модулярной параметризации).

17. Дифференциально-геометрическая связность, определяемая уравнениями Эйлера-Пуассона

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона может быть рассмотрен как каноническая функциональная аналитическая групповая связность на специальной ортогональной группе $SO(3)$ с механически естественным условием тривиальности ее фундаментальной группы. Это условие выделяет данные уравнения из их многомерных обобщений и является условием *фазовой односвязности*, т.е. условием эквивариантной односвязности (в частности, односвязности глобального нормального расслоения $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$).

Классическое представление группы $SO(3)$ двулистным накрытием стандартной $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (т.е. $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ вложенной в $4d$-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}_O^4$ с фиксированным центром O), индуцирует реализацию указанной эквивариантной аналитической связности на $SO(3)$ в виде канонической локальной (аффинной) односвязной функциональной аналитической групповой структуры G на пространстве $\mathbb{E}_O^4$.

Аналитическая групповая структура G является последовательным подъемом симметрии обратимости $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ исходных уравнений (1) – (2) в их:

- *конфигурационное пространство*, моделируемое изоморфизмом $\mathbb{E}_{O,*}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}$;
- *фазовое пространство*, моделируемое изоморфизмом $\mathbb{E}_{O,*}^5 \cong \mathbb{E}_O^{5,*}$.

Каноническое аффинное (локальное) представление структуры G реализуется уравнениями Ковалевской (хотя казалось бы, что это специализация уравнений (1) – (2) для ее частного случая) и представляет канонический генератор (дифференциал) отображения центральной симметрии евклидова $5d$-пространства. Соответственно, глобальное (проинтегрированное локальное) представление таково: $G \cong Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$.

В контексте связи с физикой отметим, что фундаментальная функциональная групповая структура G также является индуцированным каноническим односвязным $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантным двулистным накрытием классического $(3d+1)$-пространства-времени Минковского. Это пространство Минковского можно интерпретировать как $3d$-аналог прямолинейной обмотки $2d$-тора из соответствующей теоремы Лиувилля-Арнольда (см. [7]).

Механический смысл аналитической связности G в контексте исходного дифференциального уравнения очень естественен – это атрибут корректной краевой задачи для уравнений Эйлера-Пуассона:

1) фазовый поток динамических уравнений (1) Эйлера изоморфен отображению общего <u>*аналитического*</u> качения стандартного геометрического $3d$-шара Ш^3 *по пространству* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – фазовый поток динамических уравнений Эйлера (1) в обратимом времени $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ с гамильтонианом:

$$|(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

где i, j – независимые мнимые единицы.

Данное отображение, описывает:

- *общую инерциальную динамику* качения массивного однородного $3d$-шара по свободной прямой в пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, ортогональной классическому плоско-параллельному полю гравитации;
- *аналитическое* (*инерциальное*) *качение геометрической точки* по $4d$-пространству $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- *геометрическую точку* (*общее равновесие геометрической точки*) в $5d$-пространстве $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- *инерциальную динамику ротора в стабилизированном кардановом подвесе.*

2) фазовый поток кинематических уравнений (2) – каноническое граничное условие фазового потока уравнений (1). Он изоморфен отображению *общего непрерывного* качения $3d$-шара Ш^3 *по пространству* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – фазовый поток уравнений Пуассона (2) в обратимом времени $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ с гамильтонианом:

$$exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2),$$

представляющий:

- *общую равновесную* (*безразличную*) *динамику* качения массивного однородного $3d$-шара по пространству $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (его адиабатическую динамику, эквивариантную статику);
- *непрерывное* (*безразличное*) *качение геометрической точки* по пространству $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- *потенциал относительной стабилизированной динамики системы*: «*ротор – кольца карданова подвеса*».

Соответствие данной динамической модели уравнений (1) – (2) с классикой таково:

> Классические интегрируемые случаи (их фазовые потоки) – канонические аффинные карты на классах эквивалентности указанных геометро-динамических моделей. В частности, фазовый поток тривиального волчка – каноническая аффинная карта на непрерывном качении геометрического шара Ш^3 *по пространству* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

В «твердотельном» контексте уравнений Эйлера-Пуассона групповая структура G реализуется канонической экспоненциальной (жесткой) аналитической симметрией:

- канонической $4d$-тригонометрией;
- корректно определенной канонической экспонентой исходного классического фазового *аффинного* пространства $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma}, \vec{\omega})$ после его *перенормировки на скрытую от классического рассмотрения групповую фазовую диагональ, обладающую фундаментальной релятивистской и квантовой структурой*;
- отображением канонического разделения переменных исходных уравнений (1) – (2);
- производным отображением модулярной параметризации кривых $E/\mathbb{Q}$.

18. Галуа-роль конфигурационной размерности 4 и фазовой размерности 5 в контексте разрешимости фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

Фундаментальной моделью фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона является *отображение общего вращения сферы* $\mathbb{S}^3$ – *локального отображения* в $4d$-пространстве $\mathbb{E}_O^4$ с фиксированным центром O. Данное вращение представляет монодромию вписанного в *сферу* $\mathbb{S}^3$ сопровождающего его тетраэдра (четырехмерного). Такая монодромия имеет каноническую многомерную Галуа-структуру и *специальную функциональную адельную топологию* ([1]).

Другими словами, пространство $\mathbb{E}_O^4$ обладает скрытой внутренней *авто*компактифицирующей (в итоге, эквивариантно компактифицирующей) функциональной Галуа-структурой групповой изометрии, являющейся общим нелокальным поворотом евклидова пространства $\mathbb{E}_O^4$. Эта структура:

- изоморфна корректно определенному генератору функциональной симметрии G;
- является *непрерывным сюръективным* отображением $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{E}_O^4$ (функциональным автоморфизмом пространства $\mathbb{E}_O^4$, в итоге, представляемым каноническим потоком больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$), представляющим зеркальную симметрию обратимости по времени уравнений Эйлера-Пуассона как эквивариантное отображение Пеано *ориентированного* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$*-нуля* в конфигурационное четырехмерие.

В этом контексте *размерности* «4» *и* «5» *являются уникальными*, поскольку только для них выполняется наличие Галуа-структуры у фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

- $\mathbb{E}_{O,*}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}$ – *конфигурационное пространство* с *канонической* функциональной Галуа-структурой $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$-симметрии;
- $\mathbb{E}_{O,*}^5 \cong \mathbb{E}_O^{5,*}$ – *фазовое пространство* с *канонической* производной функциональной Галуа-структурой $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$-симметрии.

Поэтому только для этих «Галуа-размерностей» реализуется полная симметризация классических (аффинных) пространственных координат и времени посредством отображения зеркальной симметрии обратимости по времени.

Данное *отображение симметризации, в итоге, оказывается каноническим самосопряжением* в каноническом пространстве функциональных кватернионов и имеет структуру конечнопорожденной Галуа-параметризации множества фазовых состояний уравнений Эйлера-Пуассона.

В этом контексте Галуа-упорядочивания размерность «5» является «генерирующей стэковой размерностью» для алгоритмизации формул общего решения уравнений Эйлера-Пуассона. Она имеет смысл аффинной размерности области определения вертикального равновесия классического маятника. Корректность указанной алгоритмизации обеспечивается тем, что:

- 4 – канонический модуль конечной дискретной Галуа-разрешимой параметризации;
- 5 – канонический модуль функциональной Галуа-разрешимой параметризации (модулярной параметризации).

19. Галуа-структура связности фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

$\mathbb{C}$-аналитическая (*изотропная*) $\mathbb{S}^3$-связность G, имеющая *общее* $\mathbb{C}$*-аналитическое вращение* сферы $\mathbb{S}^3$ (*только* <u>*локально происходящее*</u> *в 4d-пространстве* $\mathbb{E}_O^4$) как *одну из геометрических реализаций*, оказывается математически и физически структурно нетривиальной:

- она в качестве своей области определения (скрытым образом) содержит поле дробно-рациональных функций (как каноническую функциональную Галуа – автодуальную/самодвойственную решетку);
- она реализуется каноническим *фазово-твердотельным* (монодромным «конфигурационно-импульсным») вращением стандартного $3d$-шара – его вращением, инвариантным относительно множества аналитических систем отсчета в $3d$-пространстве $\mathbb{E}^3$ (эквивалентным «трехшаровой интерпретации», см. п. 30);
- она представляет каноническую *аналитическую* гомотетию пространства $\mathbb{E}_O^4$ с канонической эквивариантной групповой Галуа-инвариантной фактор-структурой (производным коммутантом ($[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$, $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$]);
- она представляет каноническую гомотетию $4d$-сферы пространства $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ с канонической эквивариантной групповой Галуа-инвариантной фактор-структурой (производным коммутантом ($[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$, $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$]) -

каноническим отображением глобальной самодвойственности (автодуальности) $T\mathbb{S}^4(\mathbb{C}) \cong N\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$.

20. Функциональная нетерова структура фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

Уравнения Эйлера-Пуассона реализуют локальное (аффинное), но *не*каноническое представление $5d$-евклидовой экспоненты G, а уравнения Ковалевской – уже каноническое (канонически нормализованное) локальное (аффинное) представление.

Но оба эти фундаментальные уравнения не идентифицируются классическим рассмотрением как структурно экспоненциальные, что и является идейным ключом для их точной разрешимости.

Вместе с тем, экспоненциальная структура G оказывается нетривиальной:

- с одной стороны, она кажется совсем несложной, имея, по сути тривиальную, неинформативную реализацию отображения, канонически двойственного к отображению обычного параллельного переноса в евклидовом $5d$-пространстве $\mathbb{E}_O^5$ (отображения, обозначаемого $Transl\left(\mathbb{E}_O^5\right)$);
- а с другой – имеет скрытую нетривиальную функционально-арифметическую фактор-симметрию Галуа, *автоматически* «градуирующую и фильтрующую» евклидово пространство $\mathbb{E}_O^4$ (благодаря «разрешимой Галуа-размерности», равной 4-м) – каноническую аффинную карту на *эквивариантном* фазовом пространстве $\mathbb{E}_{O,*}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}$ уравнений (1) – (2), представляющем каноническое равновесие модулярного q-маятника;
- данная фактор-структура геометрически соответствует канонической связности в слоении коразмерности 1 (эквивариантном фробениусовом слоении, см. [4]) на отображении канонической двойственности «вектора-ковектора» $\mathbb{E}_{O,*}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}$ с универсальным коммутатором векторных полей на его слоях в виде группового коммутанта $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$);
- представляет канонический прямолинейный поток на трехмерной бутылке Клейна, обозначаемой Kl^3; неориентируемое многообразие Kl^3может быть определено как:
    - каноническое собственное сечение канонической двойственности $4d$-решеток $\mathbb{E}_{O,*}^4/\mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}/\mathbb{Z}^4$,
    - каноническое гиперплоское сечение в пространстве $\mathbb{E}_O^4$ является плоским пространством, оснащенным канонической непрерывной структурой прямолинейного потока.

Канонический прямолинейный поток (обозначаемый $l(Kl_O^3)$ на трехмерной бутылке Клейна определяется как орбита канонического изоморфизма $\mathbb{E}_{O,*}^5/\mathbb{Z}^5 \cong \mathbb{E}_O^{5,*}/\mathbb{Z}^5$ и является отображением параллельного переноса в $5d$-евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^5$.

Отображение $Transl\left(\mathbb{E}_O^5\right) \cong l(Kl_O^3)$ параллельного переноса является операцией канонической непрерывной склейки двух $3d$-шаровых карт канонического атласа на $3d$-сфере. Функциональное многообразие $Kl_{C^o}^3$, представляющее канонический прямолинейный поток на $3d$-бутылке Клейна Kl^3, является канонической инвариантной орбитой этого отображения, канонически склеивающей эти карты-$3d$-шары.

Отображение $Transl\left(\mathbb{E}_O^5\right)$ имеет каноническую фактор-групповую Галуа-структуру *скользящей суперсимметрии* в трехмерном евклидовом пространстве и оказывается фундаментальной функционально-арифметической нетеровой *супер*симметрией исходных уравнений – эквивариантной квантовой нетеровой *супер*симметрией (см. также п. 30).

Механической реализацией орбиты отображения производной симметрии $[Transl(\mathbb{E}_O^5), Transl(\mathbb{E}_O^5)]$ является эффект Джанибекова (п.33).

Геометрической реализацией этой нетеровой *супер*симметрии также является геометро-динамическая трехшаровая интерпретация (см. п. 30).

Потенциалы указанных нетеровых симметрий имеют смысл решений уравнений Эйлера-Пуассона:

- функция $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ представляет универсальный потенциал:
  - корректно определенного отображения $5d$-параллельного переноса $Transl(\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}))$,
  - универсальной односвязной непрерывной (функциональной) *фазовой* нетеровой *супер*симметрии в трехмерном пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C})$;

- функции $L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$ представляют:
  - нетривиальные циклы генератора (дифференциала) отображения $Transl(\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$,
  - односвязные непрерывные нетеровы *фазовые супер*потенциалы;

- функция $exp\ \zeta(s, \Delta_{12}(q))$ представляет универсальный потенциал:
  - производного отображения параллельного переноса $[Transl(\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C})), Transl(\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}))]$,
  - универсальной односвязной производной непрерывной нетеровой *супер*симметрии в трехмерном пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C})$;

- $exp\ L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$ – функции представляют:
  - нетривиальные циклы отображения $Transl(\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C})), Transl(\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}))]$,
  - односвязные производные непрерывные нетеровы *фазовые супер*потенциалы.

Собственно, само евклидово $5d$-пространство $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с аффинной картой $\mathbb{E}^5(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, s|t)$, где упорядочение «,» также независимая переменная, является областью определения (расширенным конфигурационным пространством) уравнений Эйлера-Пуассона и играет фундаментальную роль в механическом и физическом смысле, представляя базовую нормировочную структуру в его фазовом пространстве:

- абсолютную аффинную систему отсчета для описания фазово односвязной (глобально односвязной) аналитической динамики;
- конфигурационное пространство адиабатической динамики уравнений (1) – (2);
- конфигурационное пространство вертикального равновесия классического математического маятника как аффинную орбиту отображения канонической глобально односвязной двойственности его нижнего и верхнего равновесий.

Возникающая корректировка (перенормировка) «на абсолютную фазовую $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$-систему отсчета – *каноническое аффинное представление вертикального равновесия математического маятника*» – сводится к эквивариантному аналитическому продолжению классических «*пред*эквивариантных» («*пред*экспоненциальных», «*пред*гироскопических») аффинных структур динамики на слоениях Лиувилля-Арнольда (прямолинейных потоков на лиувиллевых торах), ассоциированных с уравнениями (1) – (2), в их формальные особенности $s = 0, 1, \infty$ в формальном времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$.

Важно отметить, что данные особенности динамически и физически осмыслены: они являются особенностями двояко-асимптотических движений уравнений (1) – (2). Они также индуцированы единственной физической (эквивариантной) особенностью этих уравнений – точкой закрепления универсального волчка, эквивалентно и эквивариантно координатизируемой каноническими особенностями $s = 0, 1, \infty$ формального времени уравнений (1) – (2).

Образом этого отображения корректировки является каноническая глобальная (однокартная) односвязная аналитическая структура на группе $SO(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})$, координатизируемая корректно определенной экспонентой $exp\ \zeta(s, \Delta_{12}(q))$ функции $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

Механическим смыслом этой аналитической структуры является нетривиальная автоколебательная $\mathbb{Z}_2$-градуированная (вращательно-колебательная) *гироскопическая* динамика волчков (*$\mathbb{Z}_2$-градуированных гироскопов – супергироскопов)*, имеющая:

- релятивистский и квантовый характер;
- экспериментальные визуализации: обычный и обобщенный орбитальный эффект Джанибекова.

См. ссылки:

- пример сложной кувырковой динамики МКС, визуализированной NASA:

  https://zen.yandex.ru/media/scikit/mlm-nauka-kak-pokazatel-problem-v-rossiiskoi-kosmicheskoi-otrasli-6107c4e5906df03da9685bda?&,

- пример штатной стыковки с запаздывающим автоколебанием всей МКС как твердого тела, происходящим через несколько секунд после момента стыковки грузового корабля:

  https://zen.yandex.ru/video/watch/620d2d8ee33a7c504a8353b2

21. Эквивариантное число степеней свободы уравнений Эйлера-Пуассона - 20 (над $\mathbb{R}$-временем) и 281 (над $\mathbb{C}$-временем)

В соответствии с приведенными в данной работе различными моделями фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона *является аналитической гамильтоновой системой с одной глобальной степенью свободы – обратимым временем* $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ (с эквивариантной мероморфной адельной топологией, см. [1]) и интегрируется в указанных выше функциях.

Число *аффинных степеней свободы* этой системы (над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-временем) равно рангам (над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$) эквивариантной функциональной алгебры Ли – генератора групповой аналитической структуры G:

- **20** – над $\mathbb{R}$-временем;
- **281** – над $\mathbb{C}$-временем,

представляющих:

- число степеней свободы:
  - аналитического функционального маятника,
  - модулярного q-маятника

  над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$-временем соответственно;
- ранги отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5}$ в пространстве $\mathbb{E}_O^5$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, соответственно (см. пп. 22, 31). Отметим, что число 281, как физическая постоянная, было обнаружено в теоретической физике (постоянная Рязанцева, см. [10], см. также п. 41).

В итоге, числа 20, 281 – это ранги функциональных (бесконечномерных) алгебр $g_2(\mathbb{Q}(s))$ и $e_8(\mathbb{Q}(s))$, изоморфных каноническим генераторам следующих фазовых потоков в пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (см. п. 31):

- непрерывного качения массивного однородного $3d$-шара *по прямой* $\mathbb{R}|\mathbb{C}$, *ортогональной линиям классического плоско-параллельного поля*;
- непрерывного качения геометрического (безмассового) шара Ш^3 *по свободной в* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ *прямой* $\mathbb{R}|\mathbb{C}$.

22. Глобальная геометрия и динамика эффекта точной разрешимости

В инвариантной форме уравнения Эйлера-Пуассона можно представить в виде дифференциала отображения их зеркальной симметрии обратимости по времени $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$, рассмотренного как эквивариантное аналитическое функциональное двулистное накрытие группы $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$, являющейся классическим конфигурационным пространством этих уравнений:

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d(SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)).$$

Общая схема получения явной аналитической формы общего решения данных уравнений состоит в приведении их фазового потока к экспоненциальной форме – *эквивариантной нормальной* (*канонической*) *групповой форме потока больших* ***ко****кругов на трехмерной сфере* $\mathbb{S}^3$ (которая, собственно, и является орбитой симметрии $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ классического гамильтониана уравнений Эйлера-Пуассона).

Другими словами, можно сказать, что геометрическая суть разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона состоит в канонической функциональной кватернионной фактор-групповой структуре их конфигурационного пространства, состоящей в канонической функциональной Галуа-разрешимости канонического фактор-группового самоподобия (функциональной экспоненциальности, см. п. 1) их симметризованного расширенного (аффинным временем):

- конфигурационного $4d$-пространства $\mathbb{E}_O^4$, ограниченного на бесконечности компактифицирующей $3d$-сферой $\mathbb{S}^3$;
- фазового $5d$-пространства $\mathbb{E}_O^5$, ограниченного на бесконечности компактифицирующей $4d$-сферой $\mathbb{S}^4$.

В инвариантной форме уравнения Эйлера-Пуассона можно представить в корректно определенных и эквивалентных формах следующим образом:

$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = dZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}[s]|\mathbb{R}[t])}$ – универсальное представление;

$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d([\mathbb{S}_{Hopf}^3[s|q|t], \mathbb{S}_{Hopf}^3[t|q|s]])$ – эллиптическое представление;

$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d([Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym|Rot)[s|q|t], Z_O^{\mathbb{E}^4}(Rot|Sym)[t|\overline{q}|s]])$ – коническое представление;

$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d(\mathbb{S}_O^4(Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym \cong Rot)[q]), (\mathbb{S}_O^4(Z_O^{\mathbb{E}^5}(Rot \cong Sym)[q]))$

– гиперболическое представление);

$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d\left(Transl\big(\mathbb{E}_O^5[s|t]\big)\right) = d(l(Kl^3[s|t]))$ – плоское представление,

где

- [,] – каноническая аффинная проекция канонической операции в функциональном пространстве ковекторов – собственных сечений глобального изоморфизма $T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (классическое векторное произведение);
- $\mathbb{S}_{Hopf}^3[s|q|t]$ – классическое расслоение Хопфа $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ с каноническими аффинными координатами $s|t$ на его слоях;
- d – корректно определенный дифференциал: дифференциал канонического генерирующего сечения глобально (однокартно) определенного изоморфизма $T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- $Z_O^{\mathbb{E}^4} \cong Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}(Sym[q], Transl(\mathbb{E}_O^4)[t], Rot\,[\,\overline{q}\,])$ – отображение канонической непрерывной центральной симметрии в $4d$-пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ и соответственно:

- $Sym[q]$ – зеркальная симметрия в пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, относительно его центра O,
- $Rot[\,\overline{q}\,]$ – поворот на угол π в пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, относительно его центра O,
- $Transl(\mathbb{E}_O^5)[t]$ – канонический параллельный перенос в евклидовом $5d$-пространстве $\mathbb{E}_O^5$,
- $l(Kl^3[s|t])$ – прямолинейный поток на $3d$-бутылке Клейна (в текущем контексте – это поток больших кругов коразмерности 1 на $4d$-сфере $\mathbb{S}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, собственно $3d$-бутылка Клейна – это выделенный такой большой $3d$-круг).

При этом отображение параллельного переноса $Transl(\mathbb{E}_O^5)[t]$ является канонической непрерывной групповой диагональю (фактор-групповой диагональю) изоморфизма

$$\mathbb{E}_{O,*}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}_O^{5,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}).$$

Данное отображение:

- *обладает $\mathbb{Z}_3$-градуированной групповой структурой* – относительной *аддитивной* $((\mathbb{C}|\mathbb{R})/Rot)$, относительной *мультипликативной* $((\mathbb{C}|\mathbb{R})/Sym)$, относительной *диагональной* $((\mathbb{C}|\mathbb{R})/(Sym \cong Rot))$,
- корректно определено как однозначное отображение *<u>только в аффинном</u>* <u>$5d$</u>*<u>-мерии</u>* в силу *функционально* Галуа-разрешимой структуры его генератора *только в размерности* «5».

Отметим, что приведенная выше универсальная инвариантная форма уравнений (1) – (2) является инвариантной формой представления и уравнений Ковалевской, по сути являющихся нормальной формой уравнений (1) – (2).

Фазовый поток уравнений (1) – (2) имеет модель канонического аналитического отображения самоподобия $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$, с канонической функциональной групповой Галуа-структурой, имеющую потенциал в виде специальной функции $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

Симметрия такого аналитического экспоненциального самоподобия $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ представляет множество односвязных аналитических автоморфизмов $SO_{an}(3, \mathbb{C})$ $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$, имеющих следующие эквивалентные геометрические реализации:

- канонический поток больших *ко*кругов на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$ (*эллиптическая*);
- канонический центральный пучок прямых в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5$ (*коническая*);
- канонический поток больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$ (*гиперболическая*),

рассматриваемые как собственные сечения фазового потока уравнений (1) – (2) в виде $SO_{an}(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})$-инвариантного конуса $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$из векторов кинетического момента $\vec{M}(s|t)$ (по аналогии с классическими коническими сечениями $3d$-конуса).

Такой эквивариантный конус представляет очень естественные (даже с классической точки зрения) модели фазового потока уравнений (1) – (2):

- каноническое глобальное нормальное расслоение $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
- двулистное накрытие векторов кинетического момента $\vec{M}$ волчка Эйлера посредством инволюции по времени уравнений (1) – (2);
- геометрическую модель общей аналитической теории возмущений уравнений (1) – (2).

Все три указанные функциональные (формально бесконечномерные) реализации изоморфны *конечномерной сферо-конической модели* – $281d$-мерной специальной ортогональной группе $SO(281, \mathbb{R})$, представляющей *каноническое общее односвязное аналитическое вращение, только локально изоморфное группе* $SO(3, \mathbb{R})$.

Такое вращение является ортогональным представлением канонической функциональной экспоненты (см. п.1).

Оно имеет скрытую симметрийную структуру: *это скрытое фазово твердотельное вращение вокруг фазово неподвижной точки* (см. п.6), соответствующее скрытым степеням свободы канонического дуализма $\vec{\gamma}$-пространства и $\vec{\omega}$-пространства, индуцированного инволюцией обратимости $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

$$SO(281, \mathbb{R}) \cong Image(\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t) \to SO(3, \mathbb{R})).$$

Общее решение уравнений (1) – (2) является канонической внутренней координатизацией орбит каждой их этих эквивалентных симметрий.

23. Глобальная линеаризация фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона, в итоге, является канонической аналитической структурой (связностью) на группе $SO(3, (\mathbb{C}|\mathbb{R}))$ и генерируется фазовым потоком уравнений Пуассона, являющимся канонической непрерывной связностью на группе $SO(3, (\mathbb{C}|\mathbb{R}))$:

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{\gamma}(s|t) = [\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)].$$

Фазовый поток $g_P^{s|t}$ уравнений Пуассона представляет канонический прямолинейный поток в функциональном пространстве $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – канонической операционной нормальной форме евклидова пространства $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – пространстве $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с канонической непрерывной структурой:

$$\mathbb{E}^4_{O[\frac{i}{2}],C^0} \cong \mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^2 \otimes_{\frac{i}{2}(s|t)} \mathbb{E}^2,$$

где

- $\frac{i}{2}$ – нейтральный элемент групповой двойственности $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- O – центр сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$

и где операция $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$:

- каноническое собственное сечение канонического изоморфизма $\mathbb{E}^2 \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{E}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2$;
- каноническая непрерывная связность на центральных прямых в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- канонический (натуральный) параметр на больших ***ко***кругах на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- канонический (натуральный) параметр на больших кругах_на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Также отметим, что пространство $\mathbb{E}^4_{O[\frac{i}{2}],C^0}$ – это пространство $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с поляризацией $Z_O^{\mathbb{E}^5}$:

$$\mathbb{E}^4_{O[\frac{i}{2}],C^0} \cong \mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})/Z_O^{\mathbb{E}^5}$$

и имеется канонический изоморфизм $\mathbb{E}^4_{O[\frac{i}{2}],C^0} \cong \mathbb{E}^5_O$.

Геометрические представления пространства $\mathbb{E}^4_{O[\frac{i}{2}],C^0}$:

- $2d$-*конформное*: график стоячей спирали («стоячей спиральной $2d$-волны») на евклидовой плоскости. Генератор графика (множество со структурой группы) – это классическая плоская архимедова спираль – *четное собственное сечение* отображения упорядоченной двойственности $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- $3d$-*ортогональное*: график вертикального равновесия трехмерного математического маятника («стоячей спиральной $3d$-волны»). Генератором графика является каноническая трехмерная архимедова спираль – *нечетное собственное сечение* отображения упорядоченной двойственности $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Возникающая эквивариантная арифметика:

- является скрытым для классического рассмотрения триангуляционным граничным условием, индуцированным инволюцией обратимости по времени, играющей роль канонического генератора такой триангуляции (геометрического квантования) при своем бесконечном итерировании;
- представляет граничные условия для уравнений Эйлера-Пуассона: динамика вертикального маятника в обратимом времени (q-маятника, изотропного маятника).

Опишем координатизацию *линеаризующей замены времени* для уравнений Эйлера-Пуассона, эквивалентную описанию такого фундаментального механического объекта как ***модулярный q-маятник*** – классический математический маятник, рассмотренный с учетом инвариантности его гамильтониана относительно зеркальной симметрии обратимости по времени.

q:

- каноническая координата на упорядоченном изоморфизме $\mathbb{E}^2_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{2,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$;
- каноническая координата на асимптотическом движении классического маятника;
- каноническая *четная* (*аддитивная*) *аффинная* координата на вертикальном равновесии классического маятника;
- каноническая аффинная координата на роторе гироскопа в кардановом подвесе относительно точки закрепления;
- каноническая координата на образующей Sym центральной симметрии
$$Z_O^{\mathbb{E}^5} \cong Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}(Sym[q], Transl(\mathbb{E}^4_O)[t], Rot\ [\ \overline{q}\ ]);$$
- эквивариантный *аффинный* «угол собственного вращения волчков» (угол «φ» Эйлера).

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$:

- каноническая координата на упорядоченном изоморфизме $\mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})) \cong \mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- каноническая координата на *обратном* асимптотическом движении классического маятника;
- каноническая не*четная* (*мультипликативная*) *аффинная* координата на вертикальном равновесии классического маятника;
- каноническая аффинная координата на роторе гироскопа в кардановом подвесе относительно стабилизированных колец карданова подвеса;
- каноническая координата на образующей Rot центральной симметрии
$$Z_O^{\mathbb{E}^4} \cong Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}(Sym[q], Transl(\mathbb{E}^4_O)[t], Rot\ [\ \overline{q}\ ]);$$
- эквивариантный *аффинный* «угол прецессии волчков» (угол «ψ» Эйлера).

$q(1-q)\dots(1-q^n)$:

- каноническая координата на фактор-пространстве
$$(\mathbb{E}^2_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{2,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))/GL_2(\mathbb{Q})/GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z});$$
- каноническая координата на n – й степени итерации отображения групповой двойственности $\mathbb{E}^2_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{2,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- каноническая *аффинная* координата на *нечетном* (Rot) *периоде* симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}$.

$q(1-q)^{24}\dots(1-q^n)^{24}$:

- каноническая координата на фактор-пространстве
  $$(\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))/(PGL_2(\mathbb{Q})/GL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}));$$
- каноническая *аффинная* координата на канонической триангуляции («периоде») двояко-асимптотического движения классического маятника;
- каноническая *аффинная* координата на n – ом периоде центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}$.

$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \Delta_{12}(q)$:

- каноническая координата ($Trace$) на фактор-пространстве
  $$(\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))/PGL_2(\mathbb{Q}));$$
- каноническая *аффинная* угловая координата для модулярного q-маятника;
- каноническая *аффинная* координата на каноническом равновесии модулярного q-маятника;
- каноническая координата на двояко-асимптотическом движении классического маятника в обратимом времени;
- каноническая аффинная координата на стабилизированной системе «ротор-кольца подвеса»;
- каноническая *аффинная* координата на центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}$;
- канонический *аффинный* «угол нутации» (угол «θ» Эйлера);
- дискриминант кинематических уравнений Пуассона (уравнений (2)).

$\zeta(\mathrm{s}, \Delta_{12}(q))$:

- каноническая координата ($Trace$) на фактор-пространстве
  $$(\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))/[PGL_2(\mathbb{Q}), PGL_2(\mathbb{Q})];$$
- канонические переменная «угол» для модулярного q-маятника;
- каноническая координата на стабилизированной системе «ротор-кольца подвеса»;
- общее решение кинематических уравнений Пуассона (уравнений (2)).

Опишем *линеаризующие симметрии* для уравнений Эйлера-Пуассона.

$A_{\mathbb{Q}(s|t)}$ (аналитические мероморфные адели):

- трехмерная бутылка Клейна $Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong id\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$(нейтральный элемент);
- каноническая норма на двойственности $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$;
- каноническая норма на потоке больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- универсальный сопровождающий аналитические волчки тетраэдр;
- генератор отображения платоновой двойственности в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- свободная центральная прямая в $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- эквивариантное формальное время $\mathbb{C}|\mathbb{R}$.

$PGL_2(A_{\mathbb{Q}(s|t)}) \cong \mathbb{E}^5_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$:

- прямолинейный поток на функциональном многообразии $Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- каноническое отображение потока больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- C^0-монодромия универсального сопровождающего тетраэдра;
- каноническая глобальная C^0-карта на нормальном расслоении сферы $\mathbb{S}^3_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- каноническое двулистное накрытие свободной прямой в $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- минимальный нетривиальный модуль (векторное пространство) над $A_{\mathbb{Q}(s|t)}$;
- эквивариантное фазовое пространство $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma}, \vec{\omega})$;
- коммутант $[PGL_2(\mathbb{Q}(s|t)), PGL_2(\mathbb{Q}(s|t))]$;
- каноническая гомотетия в пространстве $\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ с генератором
  $$[PGL_2(\mathbb{Q}), PGL_2(\mathbb{Q})].$$

Дополнительные интерпретации линеаризующих уравнения Эйлера-Пуассона структур.

$A_{\mathbb{Q}(s|t)}$:

- *конфигурационное пространство модулярного q-маятника*;
- уравновешенные кольца карданова подвеса;
- конфигурационное пространство математического маятника в вертикальном равновесии с учетом его обратимости по времени;
- сепаратриса обратимой по времени фазовой динамики:
  - классического математического маятника,
  - волчка Эйлера;
- теоретико-множественное упорядочение (связность) на множестве больших *ко*кругов на $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

$PGL_2(A_{\mathbb{Q}(s|t)})$:

- *фазовое пространство модулярного q-маятника*;
- равновесно стабилизированная система «ротор-кольца» карданова подвеса;
- фазовое пространство обратимого по времени математического маятника в вертикальном равновесии;
- фазовый поток на сепаратрисе обратимой по времени фазовой динамики волчка Эйлера;
- непрерывная (C^0) связность на пространстве больших *ко*кругов на $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- C^0-связность на пространстве больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

$Ad\ PGL_2(A_{\mathbb{Q}(s|t)})$:

- *фазовый поток модулярного q-маятника*;
- инерциально вращающийся в стабилизированном кардановом подвесе ротор;
- автоморфизмы (линейная алгебра) над модулем $PGL_2(A_{\mathbb{Q}(s|t)})$;
- эквивариантный фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона;
- производная C^0-связность на пространстве больших *ко*кругов на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- каноническая C^1-гладкая автодуальная связность на пространстве больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

24. Теория Галуа для уравнений Эйлера-Пуассона

Фазовый поток *кинематических* уравнений Пуассона (обозначаемый $g_P^{s|t}$) представляет *каноническую триангуляцию отображения центральной симметрии* $Z_O^{\mathbb{E}^4}$, производимую *эквивариантной непрерывной* («кинематической») Галуа-симметрией – коммутантом группы Галуа $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$:

$$g_P^{s|t} \cong Image([Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)] \overset{\rho}{\to} \{PGL(\mathbb{E}^4_{O,*}/\mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}/\mathbb{Z}^4)) \cong \{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}\},$$

и

$$\{T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\} \cong Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \cong SO_{C^0}(3, (\mathbb{C}|\mathbb{R})) \cong g_P^{s|t},$$

где

- $\mathbb{Q}(s|t)$ – поле дробно-рациональных функций над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$ – группа Галуа поля $\mathbb{Q}(s|t)$;
- $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$ – коммутант группы Галуа $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$;
- $SO_{C^0}(3)$ – каноническая непрерывная структура (связность) на $SO(3, (\mathbb{C}|\mathbb{R}))$;
- $\mathbb{E}^4_{O,*}/\mathbb{Z}^4$; $\mathbb{E}_O^{4,*}/\mathbb{Z}^4$ – двойственные целочисленные $4d$-решетки;
- $T\mathbb{S}^3$ – глобальное касательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3$;

- $N\mathbb{S}^3$ – глобальное *ко*касательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3$;
- ρ – непрерывное биективное отображение, эквивалентное преобразованиям Ковалевской (выполненных ею в процессе *приведения уравнений Эйлера-Пуассона к интегрируемой суперсимметричной форме* в ее случае), эквивалентные корректно определенному точному отображению – отображению приведения фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона к его канонической нормальной форме в виде:
  - канонической нормальной групповой формы потока больших *ко*кругов на сфере $\mathbb{S}^3$,
  - «канонической функциональной платоновой двойственности:

    $$\{[S_{4,}S_4]\xrightarrow{\rho=exp[A_{5,*,}A_5^*]}\mathbb{S}^3\}\Leftrightarrow\{[S_{4,}S_4]\xrightarrow{\rho=exp[A_{5,}A_5]}\mathbb{S}^3\},$$

    где альтернативные группы $A_{5,*,}A_5^*$ – соответственно:
    - канонические триангуляции на свободном большом круге $\mathbb{S}^1_{big,*}$ и *ко*круге $\mathbb{S}^{1,*}_{big}$ на сфере $\mathbb{S}^3$,
    - генераторы отображений упорядоченной двойственности «$2d$-додэкаэдр – $2d$-икосаэдр» и «$2d$-икосаэдр – $2d$-додэкаэдр»,
    - $exp[A_{5,*,}\,A_5^*]$ – генератор отображения упорядоченной двойственности «$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр».

Фазовый поток *динамических* уравнений Эйлера-Пуассона (обозначаемый $g^{s|t}_{E-P}$) представляет *каноническую триангуляцию отображения производной центральной симметрии* $Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$.

Данная триангуляция реализуется:

- отображением геодезического потока на больших *ко*кругах сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, имеющего вид корректной экспоненты упорядоченного изоморфизма:

  $$exp\{T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\}\cong exp\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R});$$
- производным коммутантом $K=([Gal\ \mathbb{Q}(s|t),Gal\ \mathbb{Q}(s|t)],[Gal\ \mathbb{Q}(s|t),Gal\ \mathbb{Q}(s|t)])$ группы Галуа $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$

и имеет вид:

$$g^{s|t}_{E-P}\cong Image(K\xrightarrow{exp\ \rho}\{PGL(\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}^4\cong\mathbb{E}_O^{4,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}^4))\}.$$

Отметим, что производный коммутант $([Gal\ \mathbb{Q}(s|t),Gal\ \mathbb{Q}(s|t)],[Gal\ \mathbb{Q}(s|t),Gal\ \mathbb{Q}(s|t)])$ не совпадает с коммутантом $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t),Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$, поскольку

$$Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}(\mathbb{C}|\mathbb{R})\cong(\mathbb{C}|\mathbb{R})^{12},\text{ а}$$

$$[Z_O^{\mathbb{E}^4},Z_O^{\mathbb{E}^4}](\mathbb{C}|\mathbb{R})\cong(\mathbb{C}|\mathbb{R})^{12}\oplus(\mathbb{C}|\mathbb{R})^{12}.$$

Также отметим, что в соответствии с механическим и физическим смыслом данного математического аппарата, коммутант $[Gal\,\mathbb{Q}(s|t),Gal\,\mathbb{Q}(s|t)]$, генерирует из формального времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ размерную кинематику, а его производный коммутант – размерную динамику.

25. Соответствие «фазовое пространство ↔ фазовый поток» уравнений Эйлера-Пуассона: канонические «$4d$-тригонометрия ↔ $5d$-экспонента»

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона в обратимом времени эквивалентным образом описывается дифференциальным уравнением для функционального (кватернионного) маятника (модулярного q-маятника) – q-маятника (для краткости):

$$\ddot{x}_{\mathbb{E}_O^4}=x_{\mathbb{E}_O^4},$$

т. е. является уравнением на оператор центральной $4d$-симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}(q)$, имеющий канонический аффинный потенциал – автоморфную форму $\Delta_{12}(q)$, где структура операции дифференцирования поясняется ниже.

Данное уравнение можно считать дифференциальным уравнением *эквивариантного второго порядка* на *аналитический супераргумент* $\Delta_{12}(q)$. В таком *аналитическом «суперконтексте»* уравнения Эйлера-Пуассона эквивалентны уравнению модулярного q-маятника.

Уравнения q-маятника, в свою очередь, эквивалентны (в контексте эквивариантного аналога формулы Стокса) дифференциальному уравнению первого порядка на функциональной группе $SO_{C^0}(3)$, группе $SO(3)$ с канонической непрерывной структурой, индуцированной с $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\Delta_{12}(q)) \cong \mathbb{E}^4_O / Z_O^{\mathbb{E}^4}(\Delta_{12}(q))$:

$$\left\{ \dot{y}_{\mathbb{S}^4_O} = y_{\mathbb{S}^4_O} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \dot{y}_{SO_{C^0}(3)} = y_{SO_{C^0}(3)} \right\} \Leftrightarrow \{ \dot{y}_{\mathbb{E}^5_O} = y_{\mathbb{E}^5_O} \},$$

где функциональный аргумент y имеет эквивалентные представления:

- $y \in N(SO(3))/Z_O^{\mathbb{E}^5}(\zeta(\mathrm{s}, \Delta_{12}(q)))$, где $N(SO(3))$ – нормальное расслоение к $SO(3)$;
- $y \in \mathbb{S}^4_O$ – каноническая координата на глобальном изоморфизме $T\mathbb{S}^4_O \cong N\mathbb{S}^4_O$.

Дифференцирование, обозначенное точкой:

- согласовано с операцией $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$, т. е. каноническая непрерывная структура на пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ является инвариантной относительно этого дифференцирования;
- является каноническим дифференциалом отображения (операции) $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$;
- представляет операцию дифференцирования:
  - вдоль больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4_O$,
  - на пространстве функциональных кватернионов $\mathbb{S}^4_{C^0}$;
- представляет каноническое отображение локального (аффинного):
  - качения $3d$-шара по пространству $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - вращения $4d$-шара в пространстве $\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Таким образом, возникает естественное соответствие:

$$\left\{ \text{Соотношения для образующих центральной симметрии } Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym, Rot) \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ Generators(\mathbb{E}^4_{O,*} \cong \mathbb{E}^{4,*}_O) \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{ \text{базис канонической } 4d - \text{тригонометрии пространства } \mathbb{E}^5 \}$$

$$\updownarrow$$

$$\{ \text{Кинематические уравнения Пуассона} \}$$

Данное соответствие в исходных кинематических переменных уравнений (1) – (2) таково:

$$d|_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/Rot)[s|t]) = Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym, Rot)[s|t]$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{\gamma}(s|t) = [\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)],$$

где [,]:

- каноническое векторное произведение в функциональном пространстве ковекторов – собственных сечений глобального упорядоченного изоморфизма:

$$T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R});$$

- канонического непрерывного векторного произведения в аффинном $3d$-пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- операция канонической двойственности отображений зеркальной симметрии и поворота в пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$: $Sym_{\mathbb{E}^5} \cong Rot_{\mathbb{E}^5}$;
- операция канонического прямолинейного потока на трехмерной бутылке Клейна Kl^3, рассмотренной как собственное сечение упорядоченного изоморфизма:

$$T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R});$$

- операция *канонической непрерывной связности* в пространстве $\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;
- операция *канонической плоской связности* в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Производное соответствие «4*d*-тригонометрия ⟷ кинематика уравнений (1) – (2)», которое также является соответствием «4*d*-тригонометрия ⟷ 5*d*-экспонента», имеет вид соответствий:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Соотношение для образующих производной центральной симметрии} \\ Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym, Rot) \cong [Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot), Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)]\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ exp(Generators(\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}_O^{4,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}))) \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{ \text{генераторы канонической } 5d - \text{экспоненты пространства } \mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ \text{генераторы канонической функциональной кватернионной экспоненты } \mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{генераторы самодвойственного отображения потока больших кругов} \\ \text{на 4d} - \text{сфере } \mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\{ \text{Динамико} - \text{кинематические уравнения Эйлера} - \text{Пуассона} \}.$$

Данное соответствие в исходных кинематических и динамических переменных уравнений (1) – (2) имеет вид:

$$d|_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} Z_O^{\mathbb{E}^5} = d|_{\mathbb{C}|\mathbb{R}}[Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym, Rot)[s|t], Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym, Rot)[s|t]]$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{d}{d(s|t)}\left(\frac{d}{d(s|t)}\vec{\gamma}(s|t)\right) =$$

$$= Image([\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)], [\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)]) + Ker([\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)], [\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)])$$

$$\updownarrow$$

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = [I\vec{\omega}(s|t), \vec{\omega}(s|t)] + [\vec{c}, \vec{g}]$$

$$\updownarrow$$

$$d^2|_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})} = \left[Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}\right].$$

26. Определения компонент формул общего решения

Форма $\Delta_{12}(q)$ – единственная параболическая форма веса 12 относительно группы $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\Delta_{12}(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \qquad q = e^{2\pi i z}, \qquad z \in \mathbb{H}^+$$

и выполнено условие автоморфности:

$$\Delta_{12}(q)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\Delta_{12}(q),$$

где

- ✓ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $ad - bc = 1$, равенство, определяющее функцию $\Delta_{12}(q)$ как модулярную форму веса 12;
- ✓ $\zeta(\Delta_{12}(q))$ – дзета-функция формы $\Delta_{12}(q)$, определяемая ниже.

Аддитивное представление классической функции $\zeta(\Delta_{12}(q), s)$ имеет вид:

$$\zeta(\mathrm{s}, \Delta_{12}(q)) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s + 11/2)L_\Delta(s),$$

где

$$L_\Delta(s) = L(s, \Delta_{12}(q)) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\tau(n)/n^{11/2}}{n^s}$$

и соответственно, ее мультипликативное представление имеет вид:

$$L_\Delta(s) = L(s, \Delta_{12}(q)) = \prod\nolimits_p \left(1 - \frac{\tau(p)/p^{11/2}}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right),$$

где p пробегает все множество простых чисел.

27. Схема аналитического получения L-функциональной структуры общего решения уравнений Эйлера-Пуассона (схема доказательства теорем 1 – 4)

Непосредственные вычисления при получении общего решения уравнений (1) – (2) являются:

- *с динамической точки зрения*:
  координатизацией универсальной параметризации их фазовых траекторий обратимым временем $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$;
- *с математической точки зрения*:
  вычислением инвариантов канонической односвязной аналитической структуры на группе $SO(3)$, структурно представляющим реализации вычисления суммы геометрической прогрессии для пятимерного евклидова аргумента с канонической групповой структурой;
- *с механической точки зрения:*
  калибровкой фазового потока уравнений (1) – (2) на вертикальное равновесие классического математического маятника.

Схема вычислений общего решения L-функционального вида кинематических уравнений (2) представляет:

- координатизацию инвариантов триангулированной кинематики – инвариантов *канонической производной триангуляции* максимальной односвязной производной центральной симметрии $[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}]$;
- каноническую координатизацию эквивариантной компактификации формального времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ формальной бесконечностью ∞ (его канонической аффинно односвязной компактификации) посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

$$\mathbb{C} \cup_{Generator\,\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty \cong (\mathbb{H}_+(q) \cup \infty) \bigoplus\nolimits_{Generator\,\mathbb{Z}_2(t\to -t)} (\mathbb{H}_-(\overline{q}) \cup \infty) \cong$$

$$\cong \mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \cong \{\mathbb{E}^5_{O,*}/\mathbb{Z}^5 \cong_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} \mathbb{E}^{5,*}_O/\mathbb{Z}^5\} \cong$$

$$\cong exp(\mathbb{E}^4_{O,*}/\mathbb{Z}^4 \cong_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} \mathbb{E}^{4,*}_O/\mathbb{Z}^4) \overset{\mathrm{def}}{=} Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \otimes_{\frac{i}{2}(s|t)} Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{канонический прямолинейный поток}\\ \text{на трехмерной бутылке Клейна } Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\},$$

  где:
  - $q = e^{2\pi i \tau}$, $\tau \in \mathbb{H}_+$; $\overline{q}$ – комплексно-сопряженное число для q,
  - $Generator\,\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$, $Generator\,\mathbb{Z}_2(t \to -t)$ – канонические генераторы соответствующих инволюций,
  - $Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – трехмерная бутылка Клейна – гиперплоскость в
    $$\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \{\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})\},$$
    каноническое центральное сечение $\mathbb{S}^4$, см. п. 22;
- получение потенциала непрерывной эквивариантной компактификации формального времени $\mathbb{C}$ – функцию $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

Схема вычислений общего решения L-функционального вида уравнений (1) – (2) представляет:

- координатизацию инвариантов *канонической производной триангуляции* максимальной односвязной производной центральной симметрии $[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}]$;
- получение потенциала непрерывной эквивариантной компактификации формального времени $\mathbb{C}$ – функцию $exp\,\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

I. Схема вычислений кинематического инварианта

$$\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big) = Trace\left[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}\right] = Trace\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}.$$

1. $Image((\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty)[q,\overline{q}] \overset{\rho}{\to} g_P^{s|t}) \cong Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}$,

   где

   - ○ $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})} \cong Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}(Sym[q], Transl[t], Rot[\overline{q}]) \cong Z_O^{\mathbb{E}^5}(Sym[q], Rot[\overline{q}])/Transl[t])$,
   - ○ $Transl \cong Transl\big(\mathbb{E}_O^5[t]\big)$.

2. $Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})} = Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})/\mathbb{Z}^5} = (Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})})_{CW}$.

3. $(Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})})_{CW(n)} = (Trace\, (Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}/Rot)(\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}/Sym))_{CW(n)} = (\overrightarrow{\gamma_n}, \overrightarrow{\omega_n})_{CW}$.

4. $\overrightarrow{\gamma_n} = (Trace\, (Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}/Rot)_{CW(n)})[\frac{\tau(n)}{n^{\frac{11}{2}}}]$ – аппроксимация для векторов $\vec{\gamma}(s|t)$,

   $\overrightarrow{\omega_n} = (Trace\, (Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}/Sym)_{CW(n)})[n^{-s}]$ – аппроксимация для векторов $\vec{\omega}(s|t)$.

5. (скалярное произведение $\overrightarrow{\gamma_n}, \overrightarrow{\omega_n})_{CW}$ – сходящиеся при $n \to \infty$ частичные суммы ряда, определяющего функцию $\zeta(s,\Delta_{12}(q))$.

6. $Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})} = (Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})})_{CW} = \lim_{n\to\infty}(Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})})_{CW(n)} = \zeta(s,\Delta_{12}(q))$.

II. Схема вычисления динамического (производного кинематического) инварианта

$$exp\, \zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big) = Trace[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}].$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty &\cong (\mathbb{H}_+(q) \cup \infty) \bigoplus{}_{\mathbb{Z}_2(t\to -t)} (\mathbb{H}_-(\overline{q}) \cup \infty) \cong \\ &\cong \mathbb{E}^5_{O,C^1}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})/[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}] \cong \\ &\cong Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \otimes_{exp(\frac{i}{2}(s|t))} Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{канонический производный прямолинейный поток} \\ \text{на трехмерной бутылке Клейна } Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{канонический производный поток} \\ \text{больших кокругов на } 3d - \text{сфере } \mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{канонический производный поток} \\ \text{больших кругов на } 4d - \text{сфере } \mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\}.$$

1. $Image((\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty)[q,\overline{q}] \xrightarrow{exp\,\rho} g_{E-P}^{s|t}) \cong [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}]$.

2. $Trace[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}] \cong exp(Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}) = exp\, \zeta(s,\Delta_{12}(q))$.

Вычисление *классов одномерных подкомплексов* указанных в пунктах I и II триангуляционных инвариантов (осцилляторных/квантовых инвариантов) дает:

$$Trace\ (\rho)_{CW_{rk=1}} = \{L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})\},$$

где $(\rho)_{CW_{rk=1}}$ – канонический функциональный *CW*-комплекс для отображения ρ ранга 1, фигурные скобки являются знаком множества.

Важно, что *отображение* ρ *имеет эквивариантную плоскую структуру, которая в рамках* $\mathbb{S}^3$*-модели для производимых вычислений* ($\mathbb{S}^4$*-модель является канонически двойственной*) имеет вид:

- канонического прямолинейного потока (линейного расслоения) на канонической трехмерной бутылке Клейна Kl^3:
  $$\rho \cong l(Kl^3) \cong l\{T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C})\};$$
- канонического группового закона на потоке больших *ко*кругов (на свободном большом *ко*круге) на сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ с генератором, представляющим отображение упорядоченной двойственности «3d-додэкаэдр – 3d-икосаэдр»,

где:

- $T\mathbb{S}^3 \cong T_{/\mathbb{C},*}\mathbb{S}^3/(Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}(Sym, Transl, Rot)/Rot)$ – *глобальное* (*однокартное*) касательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
- $N\mathbb{S}^3 \cong T^*_{/\mathbb{C}}\mathbb{S}^3/(Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}(Sym, Transl, Rot)/Sym)$ – *глобальное* кокасательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
- $d\rho$ – корректно определенный дифференциал отображения ρ.

28. Комментарии структуры вычислений

Фазовый поток $g_{E-P}^{s|t}$ уравнений Эйлера-Пуассона представляет каноническую триангуляцию отображения производной центральной симметрии $[Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}]$, производимую эквивариантной Галуа-симметрией – 5-*ти местным* (5-*ти операндным*) производным коммутантом группы $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$.

Симметрия $[Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}]$ является каноническим 2-листным накрытием центрального пучка прямых в пространстве $\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Оказывается, что каждая прямая этого пучка является орбитой канонической производной $\mathbb{Q}(s|t)$-триангуляции фазового потока $g_{E-P}^{s|t}$ с канонической фактор-групповой Галуа-структурой. И важно, что такая *функционально-арифметическая* Галуа-симметрия является динамической гироскопической симметрией в трехмерном евклидовом пространстве, собственно, и реализующая фазовую динамику $g_{E-P}^{s|t}$ в потраекторном описании.

И именно такая динамическая триангуляция является отображением канонической полной симметризации 4-*х базовых переменных*: аффинных пространственных конфигурационных переменных (компонент вектора $\vec{\gamma}$) и аффинного времени исходного классического пространства-времени имеет следующую структуру:

$$Image(([Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)], [Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]) \to PGL(\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}^5)) \cong$$

$$\cong exp(T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})),$$

$$exp(T\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})) \cong SO_{an}(3, (\mathbb{C}|\mathbb{R})) \cong g_{E-P}^{s|t},$$

где:

- $PGL(\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}^5)$ – группа проективных линейных преобразований векторного пространства $\mathbb{E}^5/\mathbb{Z}^5$;
- группа $PGL(\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}^5) \cong Z_O^{\mathbb{E}^{5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}}$ представляет каноническую линейную (спиральную архимедову) триангуляцию симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$, как раз и использованную в [1] в виде ее Sp_{3d}-триангуляции (эквивалентной $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$-калибровке), как основа конструкции доказательства теорем 2 – 4;
- $SO_{an}(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})$ – каноническая аффинно односвязная аналитическая структура на группе $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$;
- $exp\ \rho$ – аффинно односвязное аналитическое экспоненциальное отображение;
- $exp\ \rho$ – отображение интегрирования уравнений Ковалевской, эквивалентное корректно определенному отображению «производной канонической функциональной платоновой двойственности»:

$$\left\{\begin{matrix}\text{функциональный}\\ 3d-\text{додэкаэдр} \cong\ T\mathbb{S}^3(\mathbb{C})\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{функциональный}\\ 3d-\text{икосаэдр} \cong N\mathbb{S}^3(\mathbb{C})\end{matrix}\right\};$$

- $$\left\{\{\ ([S_{4,}S_4],[S_{4,}S_4]) \xrightarrow{exp([A_{5,*,}A_5^*],[A_5^*,A_{5,*,}])} T\mathbb{S}^3\right\}$$

  $$\Updownarrow$$

  $$\left\{\{([S_{4,}S_4],[S_{4,}S_4]) \xrightarrow{exp([A_{5,*,}A_5^*],[A_5^*,A_{5,*,}])} N\mathbb{S}^3\right\},$$

  где $exp([A_{5,*,}A_5^*],[A_5^*, A_{5,*,}])$ – генератор отображения производной упорядоченной двойственности «$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр», представляющий ее автодуальность.

  Важно подчеркнуть, что данное отображение платоновой двойственности является каноническим отображением потока больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$, а его генератор является:

  - отображением канонической триангуляции на больших кругах на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$,
  - полным пересечением на множестве всех непрерывных поворотов на группе $SO(3)$,
  - представлением Галуа на точках 5-го порядка на эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$ – ключевым инструментом доказательства Вайлса свойства модулярности (полустабильных) кривых $E/\mathbb{Q}$ (см. [11]);
- $exp\ l(Kl^3)$ – канонический аффинно односвязный аналитический групповой закон на потоке больших *ко*кругов (или на свободном большом *ко*круге) на $\mathbb{S}^3$ с генератором – каноническим собственным сечением эндоморфизма отображения групповой функциональной двойственности $\{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}$;
- взятие производного коммутанта не является тавтологической операцией в контексте его отображения в двойственность $\{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}$: образом производного коммутанта является функциональное уравнение для функции $\zeta(s,\Delta_{12}(q))$.

В силу плоской и групповой структуры отображения ρ предыдущие вычисления канонической эквивариантной триангуляции потока больших кругов с канонической непрерывной групповой структурой на сфере $\mathbb{S}^3$ просто «экспонируются»:

$$Trace\ exp\ \rho = exp\ \zeta(s,\Delta_{12}(q)),$$

$$Trace\ (exp\ \rho)_{CW} = exp\ L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})),$$

$$[S_4,S_4] \xrightarrow{exp\ \rho=exp(exp[A_{5,}A_5])} \mathbb{S}^3,$$

$$exp\ \rho \cong exp\ l(Kl^3),$$

где $exp\ l(Kl^3)$ – канонический групповой закон на свободном большом *ко*круге на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$, с генератором, представляющим *эндоморфизм* отображения групповой двойственности

«$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр».

Появление автоморфной формы $\Delta_{12}(q)$ веса 12 обусловлено тем, что пространство $\mathbb{E}^4_{O,C^0}$ реализуется как орбита групповой автодуальной фактор-гомотетии $3d$-решетки $\mathbb{E}^3/\mathbb{Z}^3$ вдоль ее 4-х главных диагоналей, коэффициент ограничения которой на ее аффинную область определения $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ равен 12. Данная гомотетия:

- является эквивариантной *аффинной* гомотетией $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (канонической *аффинной* гомотетией потока больших кругов на $\mathbb{S}^3$) – фазового потока $g^{s|t}_{E-P}$;
- реализует *аффинно* непрерывное вращение выделенной фундаментальной области $3d$-решетки $\mathbb{E}^3/\mathbb{Z}^3$ (фундаментального куба) вокруг ее центра.

Таким образом, форма $\Delta_{12}(q)$ имеет канонический «метрический $SO(3)$-смысл»: она является канонической аффинной метрикой на $3d$-*ко*сфере $\mathbb{S}^3$ (и таковой – на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$).

Конформным динамическим представлением графика формы $\Delta_{12}(q)$ является упорядоченное множество гладких компонент сепаратрисы фазовой динамики волчка Эйлера.

Функция $\zeta(s|t, \Delta_{12}(q))$, представляет канонический потенциал:

- односвязной непрерывной компактификации $\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty$ аффинного времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- $\mathbb{Z}_3$-градуированной (строенной) фактор-групповой спирали на евклидовой плоскости (стоячей плоской волны в форме равноугольной спирали): областью определения ее генератора является классическая плоская архимедова спираль. Такая стоячая плоская $\mathbb{Z}_3$-градуированная спираль – конформное представление области определения $5d$-экспоненты в пространстве $\mathbb{E}^5_O$;
- равновесной динамики «ротор-карданов» подвес;
- отображения зеркально обратимого времени уравнений Эйлера-Пуассона:
  $Trace(\mathbb{Z}_2((s|q|t) \leftrightarrow -(s|q|t)) =$
  $= \{$явное выражение ряда для фунции $\zeta(s|(\frac{1}{2} + it), \Delta_{12}(q))\}$;
- биективного отображения модулярной параметризации кривых $E/\mathbb{Q}$:
  $Image(\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}) \cong \{E/\mathbb{Q}\}$; $Ker(\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}) \cong \{X_{E/\mathbb{Q}}\}$,

где $\{E/\mathbb{Q}\}$ – множество эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$, $\{X_{E/\mathbb{Q}}\}$ – множество модулярных кривых, параметризующих кривые $E/\mathbb{Q}$ (детальнее см. в [1]).

29. Общий интеграл уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$-временем

Вычисление «классических/маятниковых» инвариантов $Trace\ exp(d\rho)$ дает *метрику фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона* (она же – их «4-й интеграл», являющийся канонической метрикой на пространстве функциональных кватернионов):

$$Trace\ d\rho = exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2),$$

и метрику фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

$$Trace\ exp(d\rho) = |(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

где

- $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – переменные в уравнениях Эйлера-Пуассона;
- $\{0, 1,\ i,\ j\}$ – канонический базис свободной гиперплоскости в пространстве $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C})$ – *орбиты канонического операционного изоморфизма, имеющего место только в размерности* 4*:*

$$\{\mathbb{E}^2 \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}[1, i] \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[1, j])\} \cong \{\mathbb{E}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}[1, i] \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[1, j]\}$$

и имеющего механический смысл базиса сопровождающего общий волчок тетраэдра (т. е. его упорядоченных реберных медиан). Поэтому *вектор* $(0, 1,\ i,\ j)$*, сюрьективно вложенный в этот операционный изоморфизм,* имеет смысл *универсальной оси вектора кинетического момента для уравнений* (1) – (2) (см. пп. 1, 34) – оси Галуа (см. п.34).

Данный инвариант также представляет:

- общий интеграл уравнений Эйлера-Пуассона. Отметим, что из аддитивно-мультипликативной операционной диагональности канонической групповой структуры пространства $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C})$, следует, что *условие* $i + j = i \cdot j$*, указанное в монографии* [1] *как дополнительное условие существования этого инварианта, выполняется автоматически в силу корректной диагональности групповой структуры в* $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C})$, индуцированной отображением центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}(Sym, Transl, Rot)$;
- каноническую эквивариантную комплексификацию интеграла Ковалевской;
- потенциал полной аффинно односвязной аналитической симметризации переменных $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ s|t$;
- потенциал аффинно односвязной аналитической склейки (классических) интегрируемых случаев уравнений Эйлера-Пуассона в их единый фазовый поток.

Общий интеграл F_{E-P}, рассмотренный над вещественным обратимым временем, является интегралом Ковалевской, найденным ею в специальном случае интегрируемости уравнений (1) – (2):

$$F_{Kow} = |(\omega_1 + i\omega_2)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2.$$

Интеграл Ковалевской F_{Kow} (парадоксальным с классической точки зрения образом):

- является *общим интегралом уравнений Эйлера-Пуассона над вещественным временем*;
- представляет гамильтониан комплексного q-маятника;
- представляет амплитуду функционального кватернионного маятника;
- представляет полную механическую энергию инерциального вращения ротора с выделенной пространственной осью в полностью стабилизированном кардановом подвесе.

Соответствующее общее решение уравнений (1) – (2) над $\mathbb{R}$-временем имеет вид:

$$\vec{M}(t) = exp\ \zeta\big(t, \Delta_{12}(q)\big).$$

30. Геометро-динамические интерпретации общего решения

Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона реализуется орбитой отображения производной центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$– эквивариантной экспоненты фазового пространства (канонической односвязной глобальной экспоненты, канонической функциональной экспоненты):

$$\vec{M}(s|t) = [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}] = d[Transl(\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}), Transl(\mathbb{E}^5_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}))]$$

представляемой**:**

- **динамической 3*d*-моделью (каноническая 4*d* --тригонометрия):**
  - *общим* качением общего $3d$-эллипсоида по *свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - *специальным* качением центрального сечения $3d$-общего эллипсоида по *свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - общим вращением $3d$-эллипсоида (локально – в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, а глобально – в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^{281}(\mathbb{R})$ – см. теорему 6)).

  В итоге, в соответствии с теоремой 6 (п. 15), данные динамической $3d$-модели эквивалентны «стандартной геометрической модели» уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\left\{\begin{matrix}\text{отображение } s|t \to \vec{M}(s|t) \cong \text{ каноническое общее вращение} \\ \text{стандартного евклидова } 3d - \text{шара, происходящее в пространстве } \mathbb{E}_O^{281}(\mathbb{R})\end{matrix}\right\}.$$

- **динамической 3*d*-моделью (каноническая 4*d*-тригонометрия)** «трехшаровой геометрической безмассовой интерпретацией»:
  - упорядоченной композицией с канонической фактор-групповой структурой отображений качения, поступательного движения, вращения,
  - аналитическим поступательно-вращательно когерентным качением

  трех упорядоченных соприкасающихся стандартных геометрических (безмассовых) $3d$-шаров *по свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, где

    - $Ш_1^3 \cong \mathbb{E}^4/(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/Rot) \cong T\mathbb{S}^3$(катящийся геометрический шар),
    - $Ш_2^3 \cong \mathbb{E}^4/(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/(Rot \cong Sym)) \cong \{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}$ (шар, операционно синхронизирующий качение геометрического шара $Ш_1^3$ и вращение геометрического шара $Ш_3^3$),
    - $Ш_3^3 \cong \mathbb{E}^4/(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/Sym) \cong N\mathbb{S}^3$(вращающийся геометрический шар – «кокасательно» катящийся).

Синхронизация качения в операционном контексте означает возможность следующей корректно определенной декомпозиции фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\vec{\gamma}(s|t) \cong Ш_1^3 \otimes_{Ш_2^3} Ш_3^3,$$

$$\vec{M}(s|t) \cong Ш_1^3 \otimes_{exp\, Ш_2^3} Ш_3^3.$$

Отображение когерентного качения $Ш_1^3 \otimes_{exp\, Ш_2^3} Ш_3^3 / Ш_1^3 \otimes_{Ш_2^3} Ш_3^3$ представляет:

- каноническую односвязную экспоненту сферы $\mathbb{S}^3$ (при этом собственно упорядоченные соприкасающиеся шары $Ш_1^3, Ш_2^3, Ш_3^3$ представляют канонический атлас на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$, где:
  - $\otimes_{Ш_2^3}$ – операционная непрерывная склейка для $3d$-шаровых карт $Ш_1^3$ и $Ш_3^3$,
  - $\otimes_{exp\, Ш_2^3}$ – операционная аналитическая склейка для $3d$-шаровых карт $Ш_1^3$ и $Ш_3^3$;
- эквивариантное двулистное накрытие (эквивариантный дубль) канонического глобального расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$, где глобальное расслоение Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$ – образ односвязного аналитического продолжения классического расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$ в его бесконечно удаленный слой (слои глобального расслоения Хопфа – большие *ко*круги на $\mathbb{S}^3$, являющиеся орбитами указанного аналитического продолжения).

Отображение когерентного качения $\text{Ш}_1^3 \otimes_{exp\,\text{Ш}_2^3} \text{Ш}_3^3$ представляет корректно определенную аффинно односвязную экспоненту сферы $\mathbb{S}^3$:

$$exp\,\zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big) = exp\,\mathbb{S}^3 = \{\mathbb{S}^3 \xrightarrow{exp[\mathbb{S}^1_{big,*}, \mathbb{S}^{1,*}_{big}]} \mathbb{S}^3\} \cong \{\mathbb{S}^3 \xrightarrow{exp\,\mathbb{S}^1_{big}} \mathbb{S}^3\}.$$

Функции $exp\ L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}))$ представляют:

- циклы когерентного конфигурационно – вращательного отображения качения $exp\,\mathbb{S}^3 \cong \text{Ш}_1^3 \otimes_{\text{Ш}_2^3} \text{Ш}_3^3$, соответствующие:
    - классам эквивалентности слоев $exp[\mathbb{S}^1_{big,*}, \mathbb{S}^{1,*}_{big}]$ для канонического производного глобального расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$,
    - классам изогенности кривых $E/\mathbb{Q}$;
- частные решения уравнений Эйлера-Пуассона (решения их интегрируемых случаев);
- классы неэквивалентных аффинно односвязных аналитических структур на сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$.

Шары (*как множества*) имеют механическую интерпретацию орбит эквивариантной перенормировки классических углов Эйлера φ, θ, ψ посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

- $\text{Ш}_1^3 \cong \text{Ш}_1^3[\varphi]$ – *орбита универсального угла собственного вращения*;
- $\text{Ш}_2^3 \cong \text{Ш}_2^3[\theta]$ – *орбита универсального угла нутации*;
- $\text{Ш}_3^3 \cong \text{Ш}_3^3[\psi]$ – *орбита универсального угла прецессии.*

Общий интеграл F_{E-P} уравнений Эйлера-Пуассона имеет вид метрического $4d$-тригонометрического инварианта (функциональная кватернионная теорема Пифагора) производного дифференциала $dZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$ центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$:

$$F_{E-P} = Trace\ [dZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, dZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}] = |(p + iq + jr)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

где i, j – независимые мнимые единицы (см. комментарии о структуре инварианта $Trace\ exp(d\rho)$), и представляет:

- гамильтониан аналитического трехшарового качения $exp\,\mathbb{S}^3 \cong \text{Ш}_1^3 \otimes_{exp\,\text{Ш}_2^3} \text{Ш}_3^3$,
- потенциал (полную механическую энергию) *универсального* (общего) эллипсоида инерции (таковым эллипсоидом, как отмечено в п.16, является *шаровой эллипсоид*).

Трехшаровая интерпретация эквивалентна:

- $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-эквивариантной коррекции геометрической классической интерпретации Пуансо волчка Эйлера;
- общему, корректно определенному, качению *центрального сечения общего массивного однородного эллипсоида по свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$, *ортогональной силовым линиям плоско-параллельного поля классической гравитации.*

31. Глобальная геометрия и алгебра фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

Универсальная симметрия уравнений Эйлера-Пуассона определяется общей симметрией их точки закрепления. Эта симметрия является центральной симметрией евклидова $5d$-пространства $\mathbb{E}^5(\mathbb{C})$ (см. интерпретации пп. 22, 23, 25, 30).

В рамках эквивалентной интерпретации фазового потока уравнений (1) – (2) как общего когерентного непрерывного группового трехшарового качения, условия по прямой $\mathbb{C}$, корректно определяющие это отображение, также определяют:

- канонический геодезический поток больших *ко*кругов на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$;
- канонический геодезический поток больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$;
- каноническую область определения общего аналитического вращения сферы $\mathbb{S}^3$ (см. [1], с.333):
  1) $[0, 1] = \frac{i}{2}$;
  2) $[f, f] = \frac{i}{2}$;
  3) $[f, g] = (-1)^{parity\left(f(modD_2^{diag})\right)parity\left(g(modD_2^{diag})\right)}[g, f]$,
     где $D_2^{diag} \cong Diag(D_2^{+}(Sym, Rot), D_2^{\times}(Rot, Sym))$ – корректно определенная «+,×»-упорядоченная групповая диагональ абелевых аддитивно и мультипликативно записанных групп Клейна D_2^{+} и $D_2^{\times}$. Поэтому данная алгебра (двойственность) реализуется только для трехмерной сферы;
  4) $\left[f, [g, h]\right] + \left[g, [h, f]\right] + [h, [f, g]] = \frac{i}{2}$,
     где f, g, h– канонические образующие отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}$ – отображения $Sym[q], Transl[t], Rot[\overline{q}]$.

  При выполнении свойств 1) – 4) тождество Лейбница $[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]$ выполняется автоматически в силу постулируемой свойством 3) эквивалентности операций $+$ и $\times$.

Отметим, что оператор $\frac{i}{2}$ имеет «геометрический релятивистский» смысл канонического:

- центра O евклидова пространства $\mathbb{E}^5(\mathbb{C})$ с канонической групповой плоской структурой;
- центра $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$, являющейся бесконечно удаленной сферой в пространстве $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C})$ (границей стандартного открытого $5d$-шара в $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C})$).

Определение. Условия 1) – 4) определяют простую (исключительную) функциональную алгебру $e_8(\mathbb{Q}(s))$ как минимальное (дробно-рациональное) мероморфное расширение простой исключительной алгебры Ли $e_8(\mathbb{C})$ посредством центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}$.

Функциональная алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$ с геометрической точки зрения представляет:

- каноническую триангуляцию, согласованную с эквивариантным коммутатором из условий 1) – 4), орбиты двойственности $\mathbb{E}_{O,*}^4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}_O^{4,*}(\mathbb{C})$, локально изоморфную комплексному пространству $\mathbb{C}^8$;

- односвязное изотропное расширение алгебры Ли $e_8(\mathbb{C})$;
- каноническую (полярную) систему координат в пространстве $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C})$.

Функциональная алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$:

- представляет фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем
- представляет (непрерывное) отображение центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}$;
- представляет центр группового отображения $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}$;
- имеет ранг 281:

$$281 = dim(ImageZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}) - dim(KerZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}) = (0^0 + 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4) - (4 + 4),$$

где:

- ○ $\dim(ImageZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}) \cong Trace(Image(\mathbb{Z}_2 \to (\mathbb{E}_{O,*}^4(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}_O^{4,*}(\mathbb{C}))) =$

$$= 0^0 + 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 = 289;$$

- ○ $dim(KerZ_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}) \cong Trace\left(id(\mathbb{Z}_2 \to \left(\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C})\right)\right) = 4 + 4 = 8.$

Число 281 представляет:

- число *эквивариантных аффинных* степеней свободы уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем (см. п. 21);
- размерность глобального кокасательного (канонического нормального, изотропного) расслоения $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ – размерность упорядоченного канонического изоморфизма:

  $$T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}) \overset{\mathbb{S}^1_{big}}{\Longleftrightarrow} T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}),$$

  орбита которого имеет смысл:
  - ○ канонической однородно-изотропной сферы $\mathbb{S}^3$,
  - ○ орбиты канонического потока больших *ко*кругов на стандартной сфере $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
  - ○ канонической однородной сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$.
- ранг алгебры $su(5, \mathbb{Q}(s))$ – канонического минимального функционального расширения алгебры $su(5)$. При этом функциональную группу $SU(5, \mathbb{Q}(s))$, глобально (однокартно) Ли-двойственную к алгебре $su(5, \mathbb{Q}(s))$, можно интерпретировать как эквивариантную границу открытого стандартного $6d$-шара, представляющего фазовое пространство уравнений (1) – (2).

Замечание. Условия 1) – 4) также определяют операцию (скобку Ли-Пуассона) для фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем, имеющую следующую геометрическую реализацию:

- условия 1) – 3) для скобки определяют аффинно трехмерную бутылку Клейна $Kl^3(\mathbb{C})$ (каноническая бутылка Клейна над полем $\mathbb{Q}(s)$ – каноническое мероморфное расширение классической бутылки Клейна Kl^2, определенной над полем $\mathbb{R}$);
- условия 1) – 4) для скобки определяют канонический прямолинейный поток на $Kl^3(\mathbb{C})$.

32. Связь эквивариантной L-функциональной динамики с классической тэта-функциональной динамикой и классической интегрируемостью

Связь $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантной L-функциональной динамики уравнений Эйлера-Пуассона *с их ключевой классической спектральной динамикой,* разделяющей тэта-функциональные лиувиллевы блоки классически (по Лиувиллю-Арнольду) интегрируемых волчков:

- область определения двояко-асимптотических движений – поле $\mathbb{Q}(s|t)$;
- эквивариантно непрерывная динамика на двояко-асимптотических движениях сепаратрисы фазового пространства волчка Эйлера – группа Галуа $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$;
- эквивариантно непрерывная динамика на $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантных невырожденных гиперболических движениях сепаратрисы – производная группа Галуа, под которой понимается ее коммутант $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$;
- эквивариантно непрерывная динамика на $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантной сепаратрисе – также коммутант $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$.

Геометрическая динамическая трехшаровая интерпретация уравнений Эйлера-Пуассона может быть рассмотрена как образ отображения эквивариантной компактификации (канонической *аффинно односвязной* аналитической компактификации) посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

- сепаратрисной динамики классического математического маятника;
- сепаратрисной динамики динамики волчка Эйлера.

Представление фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона в виде глобального расслоения Хопфа (определенного над эквивариантной компактификацией $(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty$ формального времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$; однокартного) является *динамическим* A_5*-градуированным расширением* классического расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$:

$$g_{E-P}^{s|t} = exp\,\mathbb{S}^3 = \{\mathbb{S}^3 \xrightarrow{exp(\mathbb{S}^1_{big}[A_5])} \mathbb{S}^2\},$$

где имеется групповое транзитивное действие его слоя – аналитической окружности $exp(\mathbb{S}^1_{big}[A_5])$ на его базе – стандартной сфере $\mathbb{S}^2$.

Данная геометрическая модель является маятниковым представлением фазового потока $g_{E-P}^{s|t}$ и реализует его представление с одной глобальной степенью свободы.

Параметры интегрируемых случаев (общих и частных) уравнений Эйлера-Пуассона *являются параметрами генератора* аналитической градуировки – отображения $exp\,\mathbb{S}^1_{big}$.

В частности, для вещественного случая аффинного времени, размерность этого генератора – дифференциала $d\,(exp\,\mathbb{S}^1_{big}\,(\mathbb{R}))$ (имеющего индуцированную групповую структуру) – равна 20-ти.

Данная группа представляет канонический инвариант уравнений Эйлера-Пуассона – группу их интегрируемых над $\mathbb{R}$-временем случаев.

Фазовые потоки интегрируемых случаев образуют *полное пересечение* на производном функциональном модуле над векторным пространством отображений двойственности

$$\mathbb{E}^5_{O,*}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^{5,*}_O(\mathbb{C}|\mathbb{R}).$$

Это *полное пересечение является функциональным модулем конечного ранга*, а фазовые потоки интегрируемых случаев – его собственными подмодулями.

Гипотеза. Множество интегрируемых случаев уравнений Эйлера-Пуассона:

- над $\mathbb{R}$-временем: образует групповой базис в *каноническом пространстве функциональных кватернионов* с канонической Галуа-групповой операцией;
- над $\mathbb{C}$-временем: образует групповой базис в *каноническом пространстве функциональных октонионов* с канонической Галуа-групповой операцией.

33. Качественно новые динамические эффекты эквивариантной коррекции уравнений Эйлера-Пуассона

Фазовыми инвариантами полного набора типов интегрируемых волчков являются режимы их *периодической импульсной фазовой упорядоченной многозначной ориентируемости* (*импульсной динамической мультиориентируемости*). Эти динамические режимы пропускаются в классическом рассмотрении, и вместе с тем, оказываются принципиально важными в технологическом контексте управления ориентацией космических орбитальных объектов со сложной геометрией масс.

Данные режимы представляют последовательные периодические «кувырки» волчков – «мгновенные» (δ-образные) смены ориентации фазовых векторов волчков относительно пространства $\mathbb{E}^4_O$ (абсолютной системы отсчета для фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона). Причем, эти осцилляции ориентации имеют *импульсный* (резкий, δ-образный) характер и происходят без воздействия внешних возмущений, т.е. *являются автоколебаниями*.

Такой, с первого взгляда «*возникающий из ниоткуда*», парадоксальный и *аффинно неаналитический* эффект *импульсной динамической мультиориентируемости* является проявлением фундаментальной собственной (внутренней) зеркальной симметрии фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона, индуцированной их симметрией обратимости по классическому времени.

В соответствии с п.1 *такая динамика моделируется канонической функциональной экспонентой* – глобальной аналитической экспонентой (глобальность означает компактность и однокартность ее области определения).

Оказывается, что указанная «механическая зеркальная симметрия» представляет орбиты отображения канонической двойственности *между эквивариантным* конфигурационным пространством и *эквивариантным* пространством угловых скоростей и визуально демонстрирует физическую реализацию свойства *жесткой* (*глобальной*) *аналитичности* (*фазовой твердотельности*) *фазового потока* рассматриваемых уравнений.

Возникающий «кувырковый» эффект (как отображение в пространстве-времени) оказывается *образом отображения аналитического продолжения* классических решений уравнений Эйлера-Пуассона (посредством учета зеркальной симметрии обратимости по времени) в единственную физическую особенность фазового потока – *в точку закрепления универсального* (*общего*) *волчка*.

Эта фундаментальная особенность оказывается крайне нетривиальной («эквивариантно динамической») и соответствует (эквивалентна) особенностям классических (аффинных) фазовых траекторий при их параметризации классическим формальным аффинным (комплексным, вещественным) временем в точках $0, 1, \infty$.

Пространство (в математическом смысле), в котором особенность в точке закрепления аналитически над полем $\mathbb{C}$ *устраняется посредством зеркальной симметрии по* $\mathbb{C}$*-времени* является многомерным евклидовым пространством размерности 281.

Возникающая, качественно новая для классики, *периодическая импульсно Галуа-разрешимая мультиориентированная* фазовая динамика, является «эквивариантным разрешением особенности в точке закрепления универсального волчка». Она находит экспериментальное подтверждение в так называемом эффекте Джанибекова для динамики волчков на околоземных орбитах и, что важно – может быть визуально наблюдаема.

34. Оси Галуа

Принципиально, что парадоксальная «*фазово* кувырковая» динамика волчков, описанная в п.32, является *конечнопорожденной функционально-арифметической* (*автоколебательной*) *инерциальной* динамикой.

Наиболее просто (оптимально) эта динамика описывается относительно систем отсчета, включающих *оси их фазово твердотельной симметрии,* жестко связанные с волчками (см. [12] – [14]) – *собственные оси Галуа-эквивариантой линеаризации уравнений Эйлера-Пуассона.*

Важно, что относительно этих систем отсчета волчки становятся неподвижными, т.е. абсолютно равновесными (*абсолютно инерциальными*). Таким образом, исходная, *сильно нелинейная*, аналитическая динамика волчков *перекачивается* в собственную *одностепенную* динамику указанных Галуа-осей и, тем самым, формально линеаризуется. Это означает, что Галуа-оси собственно и являются осями кинетического момента как универсального волчка для уравнений Эйлера-Пуассона, так и интегрируемых волчков, в частности.

Математически эта физическая нормализация соответствует канонической нормализации уравнений Эйлера-Пуассона, которая в *канонической аффиной форме (над* $\mathcal{C}$ *) представляется уравнениями Ковалевской и в инвариантной форме описана в пп.27, 28, 31.*

Такая Галуа-эквивариантная нормализация влечет явный вид канонической локальной (аффинной) параметризации Галуа-осей генерирующим параметром $\frac{i}{2}d(s|t)$ для «эйлерова описания» фазового потока уравнений Ковалевской.

Неформальная же линеаризация состоит в ключевом «оптимизационном свойстве» Галуа-осей, а именно в их собственной (локальной) *абсолютной инерциальности.*

Ключевой эффект «абсолютной инерциальности» Галуа-осей носит физический характер: это *физическая линеаризация аффинно нелинейной динамики волчков, визуально наблюдаемая в трехмерном физическом пространстве.*

«Абсолютная инерциальность» имеет смысл параметризации динамики искусственного спутника («гайки») «локальным» физическим временем – реальным физическим временем, специализированным для данного конкретного волчка как физического объекта.

Например, для «лагранжева описания» фазового потока уравнений Ковалевской над комплексным временем он таков:

> Галуа-оси равномерно трансляционно перемещаются (это особенность «лагранжева описания») и равномерно вращаются в трехмерном физическом пространстве, причем, это происходит в режиме реального времени *относительно «абсолютной конфигурационной системы отсчета»* – модельного конфигурационного пространства $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Здесь пространство $\mathbb{E}_O^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ играет роль математической модели конфигурационного пространства для спутников на околоземной орбите, согласованной с известной АГД-моделью гравитационного потенциала Земли (Аксенов – Гребеников – Демин) (см.[1]). Точка O расположена в условном геометрическом центре Земли.

Математическая модель осей Галуа описывается автоколебаниями функционального кватернионного маятника (см. п.1, теорему 11, п.15), представляя ***канонический функциональный логарифм***: многозначную конечнозначную операторнозначную функцию:

$$\vec{M}(s|t) \cong ln\,\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}].$$

Галуа-оси являются:

- собственными осями:
  - центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$ (стационарное представление),
  - производной центральной симметрии $[Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}]$ (динамическое представление);
- сечениями конического (абсолютно инерциального) представления движения;
- минимальными собственными пространствами оператора канонического сопряжения (зеркальной симметрии) в пространстве функциональных кватернионов.

Кувырки ротационных возмущений искусственных спутников (обобщенных гаек Джанибекова) − орбиты канонического сопряжения в пространстве функциональных кватернионов, представляющего многозначные склейки аффинных карт в единый канонический аналитический атлас на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$.

35. Гравитационный монополь и гравитационный диполь

Особенность в точке O (в контекте АГД-модели) может быть рассмотрена как модель особенности гравитационного потенциала *гравитационного шарового диполя* (модели для гравитационного потенциала системы «Земля-Луна»), имеющего следующее естественное определение.

Определение 1. Образ отображения $\mathbb{R} \to [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}]$ вещественного самосопряжения симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}$, реализуемого <u>*аффинно 1-связным*</u> каноническим отображением фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона, определяется как <u>*гравитационный шаровой монополь*</u>.

Определение 2. Образ отображения двулистного накрытия *гравитационного шарового монополя*, реализуемого <u>*аффинно 2-связным*</u> каноническим отображением комплексификации отображения фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\mathbb{R} \to [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}] \to [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}]$$

определяется как <u>*гравитационный шаровой диполь*</u>.

Гравитационный шаровой монополь и гравитационный шаровой диполь являются орбитами канонической односвязной симметризации координат классического $(3+1)$-пространства-времени Минковского над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ временем соответственно:

$$\{ \text{каноническое конформное отображение } \mathbb{R} - \text{времени} \}$$

$$\downarrow Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}$$

$$\{ \text{однородно} - \text{изотропное пространство} - \text{время} \}$$

$$\downarrow [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{R})}] \text{ (вещественное самосопряжение)}$$

$$\{ \text{гравитационный монополь} \}$$

$$\downarrow [Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C}|\mathbb{R})}] \text{ (комплексное самосопряжение)}$$

$$\{ \text{гравитационный диполь} \}.$$

Следствием модели *гравитационного шарового диполя* является *модель квантования гравитационного поля системы «Земля-Луна»* в виде канонически определяемой «алгебры обобщенного эффекта Джанибекова».

В этом контексте отметим, что искусственные спутники Земли формально приобретают смысл «массивных гравитонов» («пробных зарядов»): например, параметры тестовой «гайки Джанибекова» (масса, спин, скорость) в точности совпадают с определяющими параметрами классического гравитона ({ 0, 2, c = скорость света в вакууме}) (см. [1]).

Здесь надо отметить, что парадоксальная c-инвариантность «гаек Джанибекова», движущихся с небольшой конечной скоростью относительно корпуса искусственного спутника, следует из скрытой c-инвариантности преобразований Ковалевской. Они обобщают известные преобразования Лоренца в контексте уравнений электродинамики и, как раз, представляют отображение фазового потока «обобщенной гайки» относительно центра шарообразной планеты (модели Земли).

Возмущенная динамика гайки (пробного гравитационного заряда) в рамках этой модели оказывается двойственными автоколебаниями для собственных автоколебаний массивной системы «Земля-Луна».

В частности, отсюда следует, что кувырков Земли (резких переворотов земной оси), аналогичных кувыркам гайки не может быть. Логично допустить, что физическим явлением, двойственным кувыркам гайки, является вращение жидкого ядра Земли как «жидкого волчка Эйлера» и, вероятно, такого же, вращения ядра Луны, синхронизированного со вращением ядра Земли.

Такая экспериментально визуализированная орбитальная динамика является интерпретацией общего решения уравнений Эйлера-Пуассона <u>*над формальным комплексным временем*</u> *в виде* *относительной динамики гравитационного шарового диполя, имеющей смысл общего решения задачи 3-х упорядоченных неточечных центрально гравитирующих масс* (*тел*) (см. [15]).

Также отметим, что динамика Галуа-осей моделируется прямолинейным потоком на канонической трехмерной бутылке Клейна, являющейся:

- образом канонического односвязного отображения аналитического продолжения сепаратрисной двояко-асимптотической динамики волчка Эйлера отображением зеркальной инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ в $s|t = \infty$;
- орбитой канонического сопряжения в каноническом пространстве функциональных кватернионов;
- каноническим центральным сечением $4d$-сферы $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ (канонический глобальный большой круг на $\mathbb{S}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ коразмерности 1).

В частности и гайка Джанибекова *в точности движется по диагональному циклу* $3d$*-бутылки Клейна* (*циклу с диагональной аддитивно-мультипликативной групповой операцией*) – см. [1] (а не в «малой окрестности сепаратрисы», как, например, указано в одной из первых работ [16] по теории «эффекта Джанибекова» и по сей день являющейся общепринятой точкой зрения, ведущей к постоянно повторяющимся крайне опасным и дорогостоящим инцидентам на орбите).

36. Небесно-механический смысл общего решения уравнений Эйлера-Пуассона как гравитационного потенциала шарового диполя

Механическим смыслом функций $exp\, L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$ являются потенциалы *гироскопических автоколебаний конечной иерархии интегрируемых волчков,* со специальными амплитудно-частотными характеристиками, определяемыми их спектральными кривыми $E/\mathbb{Q}$.

Динамика таких *гироскопических автоколебаний эквивалентна динамике автоколебаний* полностью стабилизированной системы «инерциально вращающийся ротор-карданов подвес».

Динамика таких гироскопов представляет каноническую компактификацию обратимым временем классической вращательной твердотельной динамики в классическом аффинном времени. *В обратимом времени* $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ *классическое* $SO(3)$*-вращение твердых тел канонически дуально центральному гравитационному полю для вращающегося гироскопа.*

В контексте коррекции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-обратимостью по времени существующих моделей гравитационного потенциала шарообразной планеты:

- функция $exp\, \zeta\big(t, \Delta_{12}(q)\big)$ представляет гравитационный потенциал однородного массивного шара (*потенциал шарового гравитационного монополя*);
- функция $exp\, \zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big)$ представляет гравитационный потенциал однородного массивного шарового диполя (*потенциал шарового гравитационного диполя*).

37. Соотношение классической неинтегрируемости и точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона в контексте эквивариантной коррекции КАМ-теории

Особенно важно подчеркнуть, что фундаментальная роль возникающей точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона состоит *в необходимости* конструктивной и глобализующей коррекции классики.

В частности, рассмотренная центрально-симметричная линеаризующая $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-замена времени для уравнений Эйлера-Пуассона индуцирует «интегрируемую коррекцию классического вердикта о их неитегрируемости» в форме конструктивной *эквивариантно аналитической* (глобально аналитической) коррекции классических *аффинно-аналитических* эффектов хаотизации, порожденных их (аффинно-аналитическими, *не*эквивариантными) возмущениями.

Концептуально эта эквивариантная коррекция состоит в том, что классический КАМ-хаос переходит в сложный, но физически и алгоритмически конструктивный (в конечнопорожденный и Галуа-разрешимый) детерминизм и, что важно, это визуально наглядный детерминизм.

Подчеркнем, что возникающий нетривильный конструктивный детерминизм имеет неклассическую функциональную структуру «*квантования классической* $\mathbb{Z}_2$*-ориентации*» (образно говоря – структуру *периодической импульсной детерминированной мутации многозначного конечнопорожденного квантования классической ориентации*).

Классические эффекты хаотизации динамики общего возмущения волчка Эйлера корректируются в обобщенный эффект Джанибекова – детерминированную (Галуа-инвариантную, конечнопорожденную) инерциальную динамику с периодическими импульсными режимами *фазовой* мультиориентации и реализуемую в рамках «интегрируемой иерархии волчков» для уравнений Эйлера-Пуассона – конечного упорядоченного множества интегрируемых волчков.

Конструктивно отображение коррекции моделируется производным отображением центральной симметрии евклидова пространства $\mathbb{E}_O^4$, эквивалентным отображению $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}^{24}$, представляющего действие инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ обратимости по времени на:

- вертикальном равновесии классического математического маятника;
- сепаратрисе волчка Эйлера.

Эквивариантная коррекция уравнений Эйлера-Пуассона осуществляет связь между КАМ-теорией и теорией точной разрешимости для уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\{\text{ механизмы неинтегрируемости }\} \xrightarrow{\text{эквикоррекция}} \{\text{ механизмы неинтегрируемости }\}.$$

Эквивариантная коррекция реализует конструктивные отображения «конструктивной детерминизации типов классического хаоса», образы которых имеют «гироскопический солитонный вид» *аналитических* δ*-функций с распределениями в виде «классического хаоса»*:

$$\{\text{«хаос расщепления сепаратрис»}\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{классы упорядоченных}\\ \text{конфигурационных кувырковых движений}\\ \text{в «интегрируемой иерархии волчков»}\end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{«хаос рождения}\\ \text{невырожденных гиперболических движений»}\end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{классы упорядоченных}\\ \text{спиновых кувырковых движений}\\ \text{в «интегрируемой иерархии волчков»}\end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{«хаос ветвления решений}\\ \text{в плоскости комплексного времени»}\end{array}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{классы отражений}\\ \text{в системе корней алгебры } e_8(\mathbb{Q}(s|t))\end{matrix}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{классы упорядоченных}\\ \text{конфигурационно} - \text{спиновых кувырковых движений}\\ \text{в «интегрируемой иерархии волчков»}\\ \Updownarrow\\ \text{классы (комплексы)аналитических } \delta - \text{функций}\end{matrix}\right\}.$$

38. Коррекционный учет симметрии обратимости по времени уравнений Эйлера-Пуассона и их инвариантная форма

Возникающие в процессе линеаризации преобразования исходного аффинного фазового пространства, *индуцированные зеркальной симметрией обратимости* $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ по аффинному времени уравнений Эйлера-Пуассона:

- перенормируют классическую конфигурационную $SO(3)$-твердотельность в аналитическую фазовую жесткость («глобальную фазовую твердотельность»);
- наделяют фазовое пространство специальной эквивариантной адельной нормой (канонической нормой поля дробно-рациональных функций над $\mathbb{C}$).

Важно подчеркнуть, что отображение транзитивного действия симметрии обратимости по времени в фазовом пространстве уравнений Эйлера-Пуассона оказывается эквивалентным отображению *фазово односвязной* (*аффинно односвязной*) *аналитической компактификации* их аффинных фазовых траекторий (обсужденном в п.6). *Все эквивариантные фазовые траектории являются компактными в классической архимедовой аффинной топологии* (*а классические фазовые траектории, как известно, «почти все» в этой топологии некомпактны*).

Эквивариантная перенормировка симметрией обратимости по времени имеет геометрическую модель:

- вложения группы $SO(3)$ в отображение центральной симметрии $4d$ и $5d$-евклидова пространства, соответствующего корректным конфигурационному и фазовому пространству исходных уравнений;
- отображения, канонически самодвойственного отображению потока больших *ко*кругов на стандартной $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$, эквивалентного такому же отображению для кругов на стандартной $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$.

В результате симметризующей перенормировки *исходное аффинное* (*аналитически нежесткое*) фазовое пространство исходных уравнений (1) – (2), локально расслоенное на классические (аффинные) фазовые траектории (как отмечалось, некомпактные с вероятностью 1), становится однозначно определенным *аналитически фазово жестким пространством, расслоенным на компактные аналитически жесткие фазовые траектории – аналитические δ-функции* (*имеющие смысл трехмерных аналогов классической δ-функции*).

Эквивариантно перенормированное фундаментальной зеркальной симметрией обратимости по времени исходное аффинное фазовое пространство приобретает смысл «универсального фазового волчка», который можно интерпретировать как *каноническое функциональное твердое тело – каноническую трехмерную δ-функцию* (это $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-*эквивариантно <u>непрерывно</u> перенормированная классическая δ-функция*).

Таким *универсальным (общим) волчком оказывается производный «тривиальный волчок»* – волчок с тривиальным (диагональным и единичным) тензором инерции и произвольной точкой закрепления. Для такого волчка степень вырождения параметров является максимальной. Тензор инерции тривиален и точка закрепления находится строго в центре шарового эллипсоида инерции. То есть, парадоксальным образом, «общий волчок максимально специален».

Базовая (для отображения симметризации) «конфигурационная» размерность «4» и оказывается критически важной: именно для этой размерности фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона оказывается корректно определенным *производным Галуа-разрешимым* отображением центральной симметрии четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}_O^4$ (с фиксированным центром O), представляющим каноническую нормальную форму их фазового потока.

В рамках указанной «центрально-симметричной перенормировки» классическое конфигурационное пространство в виде группы $SO(3)$ играет роль (четной) *аффинной* карты на отображении центральной симметрии пространства $\mathbb{E}_O^4$.

Для соответствия с классикой *важно отметить, что эквивариантная симметризация индуцирует односвязную аналитическую склейку ветвей «со знаками» перед квадратурами решений классических интегрируемых случаев,* реализуемую симметрией обратимости общих уравнений Эйлера-Пуассона по классическому аффинному времени и происходящую на формальной бесконечности классического аффинного времени.

Отображение проводимой эквивариантной перенормировки (симметризации):

- является многозначным (в итоге, конечнозначным) отображением эквивариантного двулистного накрытия группы $SO(3)$ посредством симметрии их обратимости по времени;
- реализуется преобразованиями Ковалевской, имеющими смысл канонической нормализации уравнений Эйлера-Пуассона;
- представляет каноническую многозначную (в итоге, конечнозначную) линеаризующую замену классического вещественного времени, имеющую специальную групповую и аффинную дробно-линейную структуру, предложенную Ковалевской;
- имеет смысл отображения эквивариантной склейки знаков $\pm$ перед квадратурами решений классических интегрируемых случаев.

Связь эквивариантной перенормировки с «эквивариантной классикой» состоит в том, что *отображение замены времени Ковалевской, нормализующее уравнения* (1) – (2), *оказывается изоморфным отображению центральной симметрии исходного аффинного* $6d$*-мерного фазового пространства* $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ уравнений Эйлера-Пуассона (индуцированной зеркальной симметрией их обратимости по времени).

Канонически определенное производное отображение указанной *аффинной* (*неканонической*) $\underline{6d}$-центральной симметрии изоморфно корректному (согласованному с зеркальной симметрией обратимости по времени) отображению фазового потока данных уравнений (и, что важно, также эквивалентно отображению *канонической производной* центральной симметрии $\underline{5d}$-пространства $\mathbb{E}_O^5$).

В этом контексте, основная идея по точному решению уравнений Эйлера-Пуассона состоит в том, чтобы записать эти локальные (по классическому аффинному времени) уравнения в инвариантной глобальной (в итоге, центрально-симметричной) форме, индуцированной их симметрией обратимости по времени, и позволяющей вычислить все их инварианты и получить точные решения.

Эквивалентная формулировка идеи о методе точного решения состоит в нахождении универсальной $(L-A)$-пары для рассматриваемых уравнений.

Инвариантами предлагаемой глобально симметризующей замены времени оказывается полный (в итоге, конечный) набор *с групповой структурой* иерархически упорядоченных типов интегрируемых волчков (случаев) – фундаментальный структурный инвариант уравнений Эйлера-Пуассона и ряд индуцированных инвариантов, в частности, обсуждаемых ниже.

39. Спектральные данные эквивариантной коррекции уравнений Эйлера-Пуассона

Данные, определяющие потраекторную фазовую динамику в результате глобальной линеаризации исходных уравнений приобретают нетривиальный, но конструктивный вид спектральных данных канонически определенной производной центральной симметрии пространства $\mathbb{E}_O^5$.

Инварианты этой симметрии представляют канонические *эквивариантные аффинные* спектральные данные уравнений Эйлера-Пуассона, имеющие структуру:

- счетного множества эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$, организованного, в итоге, в векторное пространство со структурой специальной коррекции простой алгебры Ли e_8 (имеющей конечный ранг, равный 281). Данное множество является множеством точек универсальной спектральной кривой –пространством модулей кривых $E/\mathbb{Q}$, задаваемым уравнением универсальной кривой кривой $E/\mathbb{Q}$, имеющим вид (см. п. 16) $y^2 = x(x - i_\times)(x + i_+)$;
- отображения параметризации эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$ соответствующими эквивариантными L-функциями – $L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}))$ (это каноническая форма их параметризации). Данное отображение является универсальным отображением параметризации кривых $E/\mathbb{Q}$ с каноническим потенциалом такой параметризации – функцией $\zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big)$.

Эти спектральные данные алгоритмически конструктивно (через функциональные уравнения для эквивариантных L-функций) преобразуются в спектральные данные аналитической динамики волчков.

Такая динамика оказывается весьма *неклассичной*: она характеризуется *иерархией специальной* геометрии масс волчков и *ассоциированной дуальной иерархией специальной многозначной периодической импульсной* (δ*-образной*) *динамической осцилляции их фазовой ориентации.*

40. Квантовая структура общего решения уравнений Эйлера-Пуассона как Галуа-структура пространства функциональных кватернионов

Схема получения общего решения Эйлера-Пуассона из п.27 может быть проинтерпретирована как квантование уравнений (1) – (2):

- предквантование уравнений (1) – (2) реализуется последовательно отображениями следа инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$, дающими в образе каноническую непрерывную (адиабатическую) метрику на группе $SO(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})$:

$$Trace(\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t) \to SO(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})),$$

$$Trace\big(Gal\ \mathbb{Q}(s|t) \to SO(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})\big) = \Delta_{12}(q),$$

$$Trace\big([Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)] \to SO(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})\big) = \zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big);$$

- квантование уравнений (1) – (2) реализуется отображением следа уже производной метрики: отображением следа канонической односвязной аналитической метрики на группе $SO(3, \mathbb{C}|\mathbb{R})$:

$$exp\, Trace\big([Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)] \to SO(3,\mathbb{C}|\mathbb{R})\big) = exp\, \zeta\big(s|t,\Delta_{12}(q)\big);$$

- каноническое самосопряжение в пространстве функциональных кватернионов, реализуемое автоколебаниями функционального кватернионного маятника.

Естественным механическим и физическим смыслом данного эквивариантного Галуа-представления $SO(3,\mathbb{C}|\mathbb{R})$-вращений является:

- специальная резонансная структура инерциального вращения ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе,
- обобщенный эффект Джанибекова: в соответствии в моделью гравитационного потенциала Аксенова – Гребеникова – Демина «гайки Джанибекова» являются пробными гравитационными зарядами и имеют характеристики классических гравитонов – массивных гравитонов (с нулевой гравитационной массой и ненулевой инертной) (см. п.34 и [1]).

С формальной точки зрения квантовой структуре общего решения гамильтоновых уравнений (1) – (2) соответствует:

- функциональная структура фазового пространства в виде:
    - функциональной алгебры $e_8(\mathbb{Q}(s|t))$ со свойствами *глобального гильбертова пространства* (например, можно показать, что функциональное пространство L^2 является аффинной картой на его атласе),
    - функциональных кватернионов (см. п.1):
        - представляемых *канонической непрерывной сферой* $\mathbb{S}^4_{C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – сферой $\mathbb{S}^4$ с каноническим потоком больших кругов на ней,
        - являющихся каноническим односвязным расширением классических кватернионов;
- унитарность и самосопряженность оператора фазового потока (следствие теорем 2, 3); (супер)самосопряженность – следствие удовлетворяемости функции $\zeta\big(s|t,\Delta_{12}(q)\big)$ ((супер)метрики фазового пространства) соответствующему функциональному уравнению для нее;
- фазовое пространство модулярного q-маятника;
- счетная структура множества спектральных данных – собственных пространств и значений оператора фазового потока с потенциалом $exp\, \zeta\big(s|t,\Delta_{12}(q)\big)$ (см. п. 14).

Поэтому фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона представляет корректно определенное *каноническое функциональное квантование тела классических кватернионов,* или короче – *функциональное кватернионное q-квантование*.

Важно подчеркнуть, что такое формально математически определяемое квантование, а по сути, *функционально-арифметическая нормировка,* имеет механическую реализацию в виде автоколебаний полностью стабилизированной относительной динамики «ротор – карданов подвес». Такие колебания имеют очень специальные амплитудно-частотные характеристики.

Соответствие условию трансляционной инвариантности меры на фазовом пространстве для обеспечения квантования по Шредингеру (см. [17]) реализуется эквивалентностью такой гироскопической автоколебательной динамики фазовому потоку колебаний классического математического маятника *около вертикального равновесия – колебаниям изотропного маятника или изотропного осциллятора* (см. пп. 12, 15), представляющим *канонический производный геодезический поток больших кругов на стандартной аффинной $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$*.

Замечание. Естественно предположить, что классическое уравнение Шредингера является канонической аффинной координатизацией переменных действие динамики функционального аналитического маятника.

Отметим, что *такой маятник* (*осциллятор*) *имеет физический смысл универсальной изотропной релятивизации классического маятника* (*гармонического осциллятора*), ассоциированной с аналитическим продолжением его динамики в вертикальное равновесие (*равновесие изотропного гармонического осциллятора*) посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$.

41. Постоянные Рязанцева как скалярные инварианты уравнений Эйлера-Пуассона

В контексте п. 41 динамика уравнений Эйлера-Пуассона является *функциональной периодической* динамикой с числом «*чистых состояний квантовой системы*», *равным трансцендентному скалярному инварианту*

$$exp\, rk(e_8(\mathbb{Q}(s|t))) = e^{281} \text{ («большое число Рязанцева»).}$$

Число e^{281} представляет размерность пространства коприсоединенного представления алгебры $su(5, \mathbb{Q}(s))$ в ее нейтральном элементе; алгебра $su(5, \mathbb{Q}(s))$ представляет каноническое минимальное функциональное расширение алгебры $su(5)$.

Расширение $su(5, \mathbb{Q}(s))$ может быть рассмотрено как *конфигурационное пространство для производного пространства петель на* $4d$*-сфере* $\mathbb{S}^4$ *в контексте соответствующих петлевых вычислений на* $5d$*-решетке, проделанных* Я.В. Рязанцевым, см. [9], и также пп. 27, 28).

Число e является:

- генератором канонического упорядочения полного множества колебаний функционального кватернионного маятника;
- *периодом* (*совпадающим с амплитудой*) *нулевого* (*авто*)*колебания* функционального кватернионного *маятника* (периодом/амплитудой вертикального равновесия классического маятника в обратимом времени);
- величиной диаметра *изотропной* $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (*априорно обладающей канонической групповой структурой потока больших кругов,* индуцирующей ее свойство изотропности (однородности-изотропности).

Число 281 представляет:

- размерность канонической аналитически изотропной (глобальной) $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (см. п. 31);
- число степеней свободы канонического функционального маятника (классического математического маятника в вертикальном равновесии над $\mathbb{C}$-временем);
- размерность канонической аналитически однородной (глобальной) $4d$-сферы $\mathbb{S}^4$;
- размерность канонического пространства функциональных кватернионов;
- число степеней свободы функционального кватернионного маятника (модулярного q-маятника (см. пп. 1, 12, 14);
- число степеней свободы стабилизированного («неподвижного») ротора в стабилизированном кардановом подвесе;
- собственное значение оператора центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}$ в диагональном групповом представлении.

Число e^{281} в этом «релятивистком механическом» контексте приобретает смысл фундаментального скалярного инварианта для уравнений Эйлера-Пуассона, представляющего:

- общее число их неприводимых канонически упорядоченных («чистых») фазовых состояний, занумерованных степенями их канонического *аффинно трансцендентного* генератора в виде классического основания натурального логарифма – числа e;
- коэффициент канонического группового самоподобия канонической изотропной (глобальной) $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$;
- количество элементов (фазовых точек) образа корректного отображения экспоненциального самоподобия изотропной $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ – число точек фазового потока уравнений (1) – (2);
- период автоколебаний функционального аналитического математического маятника около его канонического (вертикального) равновесия;
- период колебаний функционального кватернионного маятника;
- период колебаний модулярного q-маятника около его канонического равновесия;
- число степеней свободы инерциально вращающегося ротора в полностью стабилизированном кардановом подвесе;
- собственное значение оператора центральной симметрии $[Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^5(\mathbb{C})}]$.

Важно отметить, что число неприводимых состояний (фазовых точек) уравнений Эйлера-Пуассона:

- конечно в классической архимедовой (локальной, *неэквивариантной*) метрике;
- бесконечно (счетно) в канонической универсальной (глобальной, *эквивариантной*) метрике на функциональном поле $\mathbb{Q}(s)$, имеющей специальный адельный вид (см.[1]).

Данная *адельная мероморфная метрика индуцирует на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ каноническую функциональную аналитическую топологию* – гипотетически физически размерную топологию физического пространства-времени.

42. Заключение

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона представляется фазовым потоком канонического *аналитического функционального математического маятника,* каноническим образом *согласованного с классической кватернионной структурой исходных уравн*ений. Такая функциональная одностепенная структура фазового потока влечет его каноническую функциональную разрешимость в виде канонической функциональной экспоненты, имеющей вид $exp\,\zeta(s|t,\Delta_{12}(q))$.

Уравнения Эйлера-Пуассона определяют новый класс *специальных обобщенных аналитических функций* вида $exp\,L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$, представляющих полное пространство их решений и являющихся каноническими циклами функции $exp\,\zeta(s|t,\Delta_{12}(q))$.

Этот класс L-функций структурно представляет *класс аналитических δ-функций с односвязным шварцевым «аналитическим пробным пространством» – гипотетически класс физически размерных функций в физическом пространстве-времени.*

При этом функция $exp\,\zeta(s|t,\Delta_{12}(q))$ *является универсальной обобщенной односвязной аналитической δ-функцией.*

Функции $exp\,L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$ представляют полное пространство инвариантных функций на коприсоединенном представлении простой функциональной алгебры $e_8(\mathbb{Q}(s|t))$, изоморфной канонически определяемому пространству функциональных кватернионов.

Таким образом, исходные уравнения интегрируемы в функциональном алгебраическом смысле, обобщающем интегрируемость на конечномерных алгебрах Ли.

Функции $exp\, L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$ *обладают скрытой авторекурсивной* $3d$*-векторнозначной структурой* на эквивариантном $\mathbb{Z}_3$-градуированном упорядочении нулей функций $L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$, канонически представляющих *счетное* (*дискретное*) *пространство состояний исходной классической* (*аффинно континуальной*) *гамильтоновой механической системы*. Поэтому *исходная классическая задача, в итоге, имеет квантовую природу*.

Таким образом, «*классически неинтегрируемые*» *уравнения Эйлера-Пуассона являются канонически точно функционально разрешимыми* (*в том числе, Галуа-разрешимыми*) и вписанными в контекст конструктивной теории эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$, ассоциированной с ключевой для современной математики программой Лэнглендса.

Связь общего решения с классикой описывается конструктивной эквивариантной функционально-арифметической коррекцией классических тэта-функциональных решений (эквивариантной связью «тэта-дзета»), полноценно учитывающей симметрию обратимости по формальному времени исходных уравнений.

Общее решение также обладает механическими, математическими и физическими моделями и интерпретациями, гипотетически *физически размерными,* и позволяющими вывести теорию уравнений Эйлера-Пуассона на новый уровень с новыми прикладными возможностями.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Абраров. Точная разрешимость уравнений Эйлера-Пуассона: дзета-функции и глобальная динамика. М.: Научный мир, 2021, 614 с.

[2] Гашененко И. Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. НАН Украины, Институт прикладной математики и механики, серия «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика». Т.7, Наукова Думка, Киев, 2012, 402 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001, 384 с.

[4] Манин Ю.И. Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. М.: МЦНМО, 2009, 552 с.

[5] Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е. Об одном способе наглядного представления телеметрических данных ориентации КАМ. Тезисы докладов XXII Научно-технической конференции молодых ученых и специалистов, посвященной 60-летию полета Ю.А. Гагарина, 5-летию ракетно-комической отрасли и основания ПАО «РКК Энергия», Королев, 2021, с. 530-532.

[6] Манин Ю.И. Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002, 344 с.

[7] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1974. 432 с.

[8] Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Издательство «Наука»,1976, 672с.

[9] Беккер К., Беккер М., Шварц Дж. Теория струн и М-теория. Современное введение. М.- *Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Институт компьютерных* исследований, 2015, 632 с.

[10] Ryazantsev Y.V. The analytical Bekenstein limit and a new relations between fundamental constants. Presentation to the Third Symposium of the BRICS Association on Gravity, Astrophysics and Cosmology. Kazan, 2019.

[11] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem// Ann.Math.(2). 1995. V.141. p. 443-551.

[12] Adlaj S. Dzhanibekov's flipping nut and Feynman's wobbling plate. Polynomial Computer Algebra International Conference, St. Petersburg, Russia, 2016.

[13] Adlaj S., Berestova S.A., Misura N.E., Mityushov E.A. Illustration of rigid body motion along a separatrix in the case of Euler-Poinsot//Computer tools in education, 2018, №2, p.5-13.

[14] Мисюра Н.Е. , Митюшов Е.А. Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела.; Мин-во науки и высш. образования РФ. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2020, 120 с.

[15] Абраров Д.Л. Математическая модель гравитационного потенциала системы «Земля-Луна» в виде общего решения ньютоновой задачи трех тел. Инженерный журнал: наука и инновации, 2018, вып.2 (74); http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1714DOI: 10.18698/2308-6033-2018-2-1734

[16] Петров А.Г., Володин С.Е. "ЭффектДжанибекова" и законы механики// Докл. Академии наук. 2013. Т.451. №4. с.399-403.

[17] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Квантование по Шредингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона// Докл. Академии наук. 2020. Т.492. Математика, информатика, процессы управления, с.65-69.