Integrability of the general Euler-Poisson equations as the canonical simply connected analytic Liouville-Arnold theorem

D.L. Abrarov
abrarov@yandex.ru

Abstract. This paper continues the description of the fundamental invariant nature of the exact solvability of the Euler-Poisson equations in the context of the classical Liouville-Arnold theorem, which was started in the monograph [1] and the papers [2]-[6] detailing it.

The Liouville-Arnold integrability of these equations in the analytic smoothness class of the phase flow is revealed. Such analytic integrability is of a functional arithmetic nature and differs sharply from an analogous classical "toroidal" integrability. In particular, the classical Liouville-Arnold theorem in the case of the Euler-Poisson equations is false: "Arnold tori with rectilinear winding dynamics" are not equivariant.

Moreover, a constructive equivariant correction of the classical approach by involution of time reversibility leads to the discovery of the phase flow model of the Euler-Poisson equations in the form of the canonical simply connected derivative complex for the simplest meromorphic extension of the simple Lie algebra e_8 which includes, as subcomplexes, the same extensions of the ordered complete list of simple Lie algebras. Geometric interpretations of this fundamental algebraic model of simple functional analytic Lie algebras are given.

The mechanical interpretations of the Painlevé-Kovalewskaya method for the Euler-Poisson equations and the universal Poinsot interpretation of the phase dynamics of the general Euler-Poisson equations are also schematically presented.

Keywords: *classical and simply connected analytic Liouville-Arnold theorem, continuous and analytic complete intersection, canonical complex of minimally meromorphic simple Lie algebras, simply connected analytic Lie algebras, canonical Lie duality complex for simply connected analytic Lie algebras and groups, great-circle flow on the 4d-sphere* $\mathbb{S}^4$*, canonical analytic integrability of the Euler-Poisson equations, simply connected analytic Galois group, simply connected analytic Frobenius mapping.*

1. Введение: контроль математических моделей гамильтоновой динамики механическим смыслом

В данной работе обсуждается коррекция классической теоремы Лиувилля-Арнольда в контексте возможности ее применения к уравнениям Эйлера-Пуассона.

Различные аспекты этой коррекция уже обсуждались в работах [1]-[6], где и были определены основные встречающиеся далее объекты. Отметим здесь только, что мы рассматриваем одновременно случаи вещественного и комплексного аргумента (формального аффинного времени t и s), если это не оговаривается отдельно.

И первое, на что, в первую очередь, хочется обратить внимание – это несоответствие классической теоремы Лиувилля-Арнольда механическому смыслу аналитической динамики тяжелых волчков.

Здесь мы выходим на важный и совершенно естественный верификационный инструмент математических конструкций, используемых в механике – это наличие у них корректного механического (или, что по сути эквивалентно, физического) смысла.

Пример некорректного механического смысла. Приведем естественное механическое и геометрически наглядное соображение, непосредственно показывающее некорректность применения классической теоремы Лиувилля-Арнольда к динамике тяжелых волчков, формально описываемой этой теоремой.

Действительно, заметим, что угловая скорость аналитических волчков совпадает с угловой скоростью сопровождающего данные волчки тетраэдра. Пространство угловых скоростей тетраэдра инвариантно относительно гомотетии вдоль его реберных медиан, пересекающихся в центре тетраэдра.

Это приводит ко внутренней топологической стягиваемости инвариантных многообразий фазовой динамики волчков в точки их закрепления.

Вместе с тем, КАМ-торы, представляющие инвариантные многообразия невозмущенных интегрируемых гамильтоновых систем в классической теории возмущений, в частности, «вполне интегрируемых волчков», не являются внутренне топологически стягиваемыми в силу нетривиальности их целочисленных гомологий.

Пример корректного механического смысла. Важным примером корректного механического смысла абстрактной аналитической математической модели в динамике твердого тела является *механический смысл ключевой роли комплексного времени* в аналитических гамильтоновых системах (вместо сугубо искусственной роли, отводимой ему в современной теоретической механике):

мероморфное (дробно-рациональное время является канонической аффинной координатой

- *центральном сечении общего (универсального) эллипсоида инерции для аналитических волчков*;
- *на роторе в стабилизированном кардановом подвесе*.

Механическим смыслом метода Пенлеве-Ковалевской (эксплуатируемого «в интегрируемой математике», но не эксплуатируемого в теоретической механике) и соответствующего критерия интегрируемости («интегрируемым случаям соответствует случай неподвижных особенностей мероморфных решений с полюсами первого порядка для случая трех степеней свободы») *являются собственно исходные механические структуры* соответственно:

- инерциальное вращение центрального сечения общего эллипсоида инерции аналитических волчков;
- инерциальное вращение канонического сопровождающего аналитические волчки 2d-тетраэдра:
- инерциальное вращение ротора в стабилизированном кардановом подвесе.

При этом неподвижным особенностям мероморфных решений соответствуют:

- неподвижные точки монодромии центрального сечения общего эллипсоида инерции;
- неподвижные точки односвязной аналитической монодромии сопровождающего аналитические волчки тетраэдра (т.е., собственно это сам волчок, как аналитическое пространство);
- точки крепления стабилизированного карданова подвеса и неподвижный центр ротора.

Механическим гироскопическим смыслом системы из 2-х уравнений Ковалевской (полученным формально для ее интегрируемого случая) является

- уравнение равновесия ротора в *стабилизированном* кардановом подвесе (1-е уравнение);
- уравнение генератора (дифференциала) инерциального вращения ротора в стабилизированном кардановом подвесе (2-е уравнение).

2. Пропущенный классической теоремой Лиувилля-Арнольда геометрический, механический и физический смысл аналитической

динамики тяжелых волчков и его восстановление «эквивариантной аналитизацией»

Смысл классической теоремы Лиувилля-Арнольда состоит в геометризации фазовых потоков конечномерных «вполне интегрируемых» гамильтоновых систем, базирующийся на «коммутативной торической структуре совместных уровней (случай компактного полного пересечения) коммутативных фазовых потоков их интегралов полного набора».

Вместе с тем, это утверждение оказывается только открытой аффинной картой на общем атласе аналитической динамики исходных гамильтоновых систем:

- оно описывает лишь аффинную локальную геометрическую структуру некритических инвариантных многообразий таких систем и не является содержательным по-существу;
- не позволяет конструктивно различать и конструктивно (как аналитическими формулами, так и алгоритмически) описывать их фазовые потоки (здесь мы не касаемся формально детализирующей бифуркации торов Арнольда теории Морса-Фоменко, впрочем, также не снимающей проблему в силу имеющегося *авто*разрешения особенностей на критических слоях посредством «аналитической инволюции в аналитической ситуации класса гладкости»).

В частности, *число 0 как нейтральный элемент аддитивной группы полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ не входит в область определения торов Арнольда*, изоморфных прямому произведению конечного числа окружностей с мультипликативной структурой – фактор-пространству евклидова пространства соответствующей размерности (равной половине размерности классического фазового пространства) по его целочисленной решетке.

Это обстоятельство, в итоге, приводит к *невключению точки закрепления аналитических волчков в область определения их фазовой динамики* (см. п.1) и, тем самым, к отсутствию собственно самих волчков как физических объектов.

Более того, для *аналитических* гамильтоновых систем теорема Лиувилля-Арнольда оказывается неверной, даже включая учет бифуркаций торов Арнольда при переходе через критические уровни:

> *классическая теорема Лиувилля-Арнольда для случая трех аффинных степеней свободы пропускает односвязное непрерывное и односвязное аналитическое продолжение классического аффинного фазового потока в формальную бесконечность классического времени* – скрытую Галуа-симметрию фазового пространства, определенную над функциональным полем дробно-рациональных функций $\mathbb{Q}(s|t)$ (см. [1]).

Эта формальная математическая «симметрийная» некорректность классики *в случае аналитического класса гладкости* имеет и физические корни:

> *описание аналитической динамики посредством классической теоремы Лиувилля-Арнольда не имеет физического смысла, пропуская класс непрерывно изотропных систем отсчета (непрерывных вращательных систем отсчета), ассоциированных с угловой скоростью волчков в случае уравнений Эйлера-Пуассона.*

Такая, имеющая физический смысл, некорректность соответствует неполноте геодезических потоков на торах Арнольда относительно канонической адиабатической (непрерывной) метрики в исходном базовом пространстве-времени.

Вместе с тем, корректная интегрируемость по Лиувиллю-Арнольду имеет как раз канонический как математический, так и физический смысл:

- *канонический односвязно аналитический $3d$-шар*

- *каноническое полное пересечение в каноническом односвязном аналитическом пространстве-времени.*

Приведем интерпретации стратов аналитического полного пересечения.

Физический смысл стратов минимальной размерности:

теоретико-множественного полного пересечения

нульмерного страта

- центр однородного (геометрического) пространства-времени;
- центр абсолютной системы отсчета для описания динамики аналитических систем с односвязным фазовым пространством;

одномерного страта –

- образующая светового конуса геометрического пространства-времени (теоретико-множественное представление светового луча);
- теоретико-множественное время;

непрерывного полного пересечения:

нульмерного страта –

- центр непрерывного однородно-изотропного (физического кинематического) пространства-времени;
- точка закрепления тривиального волчка;

одномерного страта –

- образующая (непрерывный световой луч) канонического непрерывного 2-листного накрытия светового конуса геометрического пространства-времени;
- непрерывное/адиабатическое время;

аналитического полного пересечения:

нульмерного страта –

- центр односвязно аналитического однородно-изотропного (физического динамического) пространства-времени;
- точка закрепления общего волчка;

одномерного страта –

- образующая (аналитический световой луч) канонического односвязного аналитического 2-листного накрытия светового конуса геометрического пространства-времени;
- односвязное аналитическое/гипотетически физическое (реальное) время.

Механический и небесно-механический смысл односвязного аналитического полного пересечения:

- *орбита отображения односвязного аналитического разрешения ньютоновой особенности в точке закрепления общего волчка:*
    - *гравитационный монополь (полное пересечение над* $\mathbb{R}$*-временем)*;
    - *гравитационный диполь (полное пересечение над* $\mathbb{C}$*-временем).*

Механический смысл односвязного аналитического полного пересечения – представление фазовой динамики уравнений Эйлера-Пуассона в канонической нормальной форме:

- *отображение фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона в представлении конфигурационно-вращательного инерциального движения центрального сечения общего эллипсоида инерции (эйлерово представление)*;
- *отображение фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона в представлении конфигурационно-вращательного инерциального движения ротора в стабилизированном кардановом подвесе (лагранжево представление)*.

Геометрический смысл односвязного аналитического полного пересечения:

- орбита отображения односвязного самоподобия евклидова пространства $\mathbb{E}^4$ - его канонической гомотетии относительно выделенного центра;
- орбита отображения канонической центральной симметрии пространства $\mathbb{E}^4$;
- орбита аналитического центрально-подобного вращения в евклидовом 3d-пространстве $\mathbb{E}^3$;
- образ отображения двойственности Ли $e_8(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong E_8(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, рассмотренной как CW-комплекс (см. пп. 5,16).

Сопоставительный математический смысл аналитического аналога классической теоремы Лиувилля-Арнольда состоит в канонической глобальной геометризации фазовых потоков конечномерных «вполне интегрируемых» гамильтоновых систем, базирующийся на точном конструктивном описании комплекса канонического аналитического продолжения в «бесконечность формального аффинного времени» фазовых потоков интегралов их классического «полного набора».

Классическая теорема Лиувилля-Арнольда «вкладывается» в этот комплекс (имеющий каноническую структуру конечнопорожденного функционального модуля Галуа) просто как аффинная (открытая) конечномерная карта.

3. Эквивалентность свойств «аналитическая гамильтоновость» и «аналитичность» для дифференциальных уравнений

Классическая теорема Лиувилля-Арнольда рассматривает *некритические* инвариантные многообразия *гладких* интегрируемых гамильтоновых систем как *гладкие п*олные пересечения (как правило, даже не уточняется класс гладкости).

Аналитическая теорема Лиувилля-Арнольда, наоборот, рассматривает *критические* многообразия *аналитически* интегрируемых гамильтоновых систем как «полные пересечения». Именно это рассмотрение соответствует указанному выше «эквивариантному аналитическому продолжению», пропускаемому классикой. При этом оказывается, что *аналитический класс гладкости* позволяет снять условие гамильтоновости:

любая аналитическая система дифференциальных уравнений автоматически оказывается гамильтоновой.

Это происходит за счет наличия одинаковой специальной функциональной групповой Галуа фактор-структуры как у фазового потока аналитической гамильтоновой системы, так и фазового потока у соответствующей аналитической системы.

Данная групповая структура имеет вид корректно определенной групповой экспоненты $exp[Gal\ \mathbb{Q}(s), Gal\ \mathbb{Q}(s)]$.

Свойство гамильтоновости оказывается эквивалентным свойству наличия структуры *би*группового самосопряжения у указанной групповой Галуа фактор-структуры фазового пространства (см. [4]).

Экспоненциальное отображение $exp[Gal\ \mathbb{Q}(s), Gal\ \mathbb{Q}(s)]$ имеет естественную структуру односвязного аналитического отображения Фробениуса – канонического группового односвязного аналитического автоморфизма окружности.

Для *односвязного аналитического отображения Фробениуса*

фундаментальным механическим смыслом является:

- фазовый поток классического математического маятника, находящегося строго в вертикальном равновесии;
- отображение кинетического момента канонического аналитического 3d-шара (канонического изотропного шара);
- фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона;

фундаментальным геометрическим смыслом является

- отображение односвязной аналитической центральной симметрии в четырехмерном евклидовом пространстве,
- каноническое односвязное аналитическое полное пересечение.

Эквивалентность *односвязных аналитического* и *аналитического гамильтонова* полного пересечений имеет следующие реализации:

- аналитической и аналитической гамильтоновой инволюции для группы $SO(3)$
- ***фазового потока классического математического маятника строго в вертикальном равновесии***
- односвязных аналитических автоморфизмов окружности
- формального аналитического времени и (гипотетичнески) реального физического времени, параметризующего динамику массивных волчков.

Комментарий. Подчеркнем следующий механический смысл свойства аналитичности:

{Односвязная аналитичность динамической системы}
$\Updownarrow$
{*Би*гироскопичность (конфигурационно-вращательная гироскопичность)}
$\Updownarrow$
{Стабильная во времени конфигурационно-вращательная когерентность фазовых состояний}.

4. Геометрическая модель односвязного аналитического полного пересечения в случае минимального числа степеней свободы

Односвязно аналитическая Галуа-симметрия $exp[Gal\ \mathbb{Q}(s), Gal\ \mathbb{Q}(s)]$ является

- канонической нормальной формой аналитической инволюции $\mathbb{Z}_2(s)$, априорно транзитивно действующей на группе $SO(3)$ (как канонический генератор корректно определенного глобального изоморфизма $T_*SO(3) \cong T^*SO(3)$ – см. [1],[2]);
- аналитической инволюцией обратимости по формальному комплексному времени фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона;
- представляет общий волчок (как свою орбиту).

Односвязно аналитическое отображение Фробениуса, соответствующее симметрии Галуа $exp[Gal\ \mathbb{Q}(s), Gal\ \mathbb{Q}(s)]$,

- имеет вид корректно определенного экспоненциального отображения
  $exp(\lim_{p\to\infty} Gal\,(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\;\mathbb{Q}(s|t)),$
  где p пробегает все множество простых чисел;
  представляет аналитический функциональный аналог отображения «модулярной параметризации» Уайлса (см. [7]);
- представляет аналитическую связность
  - на пространстве фазовых состояний для аналитических волчков (для уравнений Эйлера-Пуассона),
  - на множестве простых чисел;
- представляет динамику
  - оси кинетического момента общего волчка,
  - фазовый поток классического математического маятника строго в вертикальном равновесии,
  - оси Галуа (см. [1]-[5]),
- представляет общее вращение общего аналитического волчка.

Эквивалентность «аналитической гамильтоновости» и просто «аналитичности» при наличии геометрической модели динамической аналитической системы дает возможность переноса модельной функциональной *односвязно аналитической* геометрии на соответствующую ей гамильтонову аналитическую систему (и наоборот).

Приведем геометрическую модель этого соотношения в случае минимального числа аффинных степеней свободы *аналитической* динамической системы, равного 3.

Теорема 1. Каноническим односвязным аналитическим полным пересечением в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ с выделенным центром и одновременно аналитическим гамильтоновым полным пересечением для случая трех аффинных конфигурационных степеней свободы является каноническая односвязная аналитическая гомотетия правильного двумерного тетраэдра с центром в его геометрическом центре, совпадающим с центром пространства $\mathbb{E}^3$.

Для данной односвязной аналитической гомотетии

- генератором является *аналитическая (аналитизированная)* самодвойственность 2d-тетраэдра в пространстве $\mathbb{E}^3$;
- образом является односвязно аналитический 3d-шар;
- механическим смыслом является каноническая гироскопичность аналитической динамики волчков: односвязная аналитическая гомотетия 2d-тетраэдра индуцирует общую вращательную монодромию канонического сопровождающего тетрадра аналитических волчков:
- алгебраическим смыслом является ее реализация комплексом двойственности односвязных аналитических алгебр Ли и односвязных аналитических групп Ли (см. пп. 8–16)

Комментарий. Данное отображение индуцирует «односвязную» аналитическую топологию в пространстве $\mathbb{E}^3$, являющуюся канонической центральной проекцией топологии канонического потока больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$.

Схема доказательства. Данное утверждение следует из того, что

- собственными пространствами данной односвязной аналитической гомотетии являются реберные медианы правильного 2d-тетраэдра (они попарно ортогональны и пересекаются в его центре);
- данная гомотетия обладает каноническим инвариантным соотношением (непрерывным/адиабатическим интегралом), представляющим
  - *гамильтониан непрерывной вращательной монодромии 2d-тетраэдра*;
  - гамильтониан потока больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4$;

большие круги на сфере $\mathbb{S}^4$ во внутренних аффинных координатах имеют вид:
- $(x^2 + y^2 = z^2)|_{\mathbb{Z}^3}$ для их вещественной аффинной параметризации,
- $(x^n + y^m = z^k)|_{\mathbb{Z}^3}$ для их комплексной аффинной параметризации,

- $2d$-тетраэдр – канонический симплекс в пространстве $\mathbb{E}^3$;
- аналитическая монодромия $2d$-тетраэдра в пространстве $\mathbb{E}^3$ является транзитивным отображением в $\mathbb{E}^3$;
- односвязная аналитическая монодромия
  - является односвязной производной непрерывной монодромии $2d$-тетраэдра
  - эквивалентна односвязной аналитической монодромии $2d$-тетраэдра относительно его выделенной реберной медианы
  - обычная (аффинно аналитическая) гомотетия является аналитической монодромией собственно реберной медианы $2d$-тетраэдра.

5. Алгебраическая модель аналитического полного пересечения в случае минимального числа степеней свободы.

Каноническое введение координат на отображении канонической аналитической гомотетии $2d$-тетраэдра дает его аналитическую эквивалентность каноническому комплексу (функциональному CW-комплексу) отображения упорядоченной двойственности Ли для простой исключительной алгебры e_8 максимального ранга и соответствующей ей группы Ли E_8

$$e_8(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong E_8(\mathbb{C}|\mathbb{R}).$$

Тождество Якоби для такой «алгебро-группы» Ли имеет вид

$$\big[f,[g,h]\big] + \big[g,[h,f]\big] + [h,[f,g]] = \frac{i}{2},$$

и соответствует тождеству Якоби для минимально мероморфных (дробно-рациональных) расширений классических простых алгебр Ли, рассматриваемых в пп. 8–16, и определяет (наряду с другими аксиомами из [5]) *односвязные аналитические простые алгебры Ли – новый класс функциональных алгебр Ли.*Эти функциональные (бесконечномерные) простые алгебры, по-существу, являются каноническими изотропными расширениями классических простых конечномерных алгебр Ли.

Данный функциональный комплекс аналитически изоморфен

- односвязно аналитическому $3d$-шару (это функциональное пространство);
- односвязно аналитическому (т.е. заведомо функциональному) конечно-порожденному модулю Галуа со структурой полного пересечения.

Дифференциал этой гомотетии в канонических координатах, связанных с «главными осями тетраэдра» (его тремя реберными медианами, попарно ортогональными) в точности оказывается уравнениями Эйлера-Пуассона:

правильный $2d$-тетраэдр имеет смысл

- *сопровождающего тетраэдра для аналитических волчков (волчков, удовлетворяющих уравнениям Эйлера-Пуассона)*;
- *односвязно аналитизированной (односвязно аналитически продолженной) сепаратрисы фазовой динамики волчка Эйлера.*

Наглядным механическим смыслом односвязно аналитической гомотетии $2d$-тетраэдра являются ее следующие эквивалентные интерпретации:

- массивный однородно заполненный тетраэдр, аналитически (инерциально) вращающийся вокруг своего центра в классическом поле тяжести;
- массивный однородно заполненный правильный тетраэдр, стоящий на выделенной реберной медиане в классическом поле тяжести *вдоль относительной вертикали*.

Отображение сопровождения тетраэдром аналитических волчков представляет:

- каноническое односвязное разрешение фазового потока на сепаратрисе фазовой динамики волчка Эйлера от особенностей посредством отображения инволюции обратимости по времени общих уравнений Эйлера-Пуассона
- каноническое *аналитическое* самосопряжение для классического тела кватернионов
- каноническую универсальную параметризацию множества эллиптических кривых с рациональными коэффициентами (бимодулярную параметризацию - биективную коррекцию классической модулярной параметризации).

Все это показывает, что классическая теорема Лиувилля-Арнольда (*не аналитическая* (гладкая, аффинная), без учета особенностей фазового потока) принципиально некорректна для аналитического класса гладкости:

- весьма далеко находится от корректного описания фазовой динамики уравнений Эйлера-Пуассона, аналитически *авто*продолженного в особенности посредством инволюции обратимости о времени;
- не соответствует геометрическому и механическому смыслам динамики уравнений Эйлера-Пуассона;
- является симметрийно неполной, пропуская симметрию аналитического *авто*продолжения «прямолинейных потоков на торах Арнольда» в критические слои в случае аналитического класса гладкости.

6. Классическая теорема Лиувилля-Арнольда

Данные классической теоремы Лиувилля-Арнольда для гамильтоновых систем с n степенями свободы имеют вид $(M^{2n}, \omega, \{F_1 = H, F_2, \dots F_n\})$, где

- $\{F_1 = H, F_2, \dots F_n\}$ – фазовое пространство (вещественное, четномерное, гладкое многообразие);
- ω – симплектическая структура на фазовом пространстве (гладкая, невырожденная «почти всюду», кососимметрическая 2-форма) ;
- H – гамильтониан (***гладкая функция*** на фазовом пространстве);
- $\{F_1 = H, F_2, \dots F_n\}$ – полный набор интегралов (подчеркнем – *неупорядоченный*) в инволюции относительно скобки, индуцированной симплектической структурой ω.

Теорема (В.И.Арнольд, геометрическая часть: гладкое полное пересечение, [8])

В случае компактного многообразия M^{2n}

- некритические совместные уровни интегралов $\{F_1 = H, F_2, \dots F_n\}$ диффеоморфны n-мерным торам $\mathbb{T}^n$;
- фазовые траектории являются прямолинейными обмотками торов $\mathbb{T}^n$.

7. Односвязная аналитическая теорема Лиувилля-Арнольда

Данные односвязной аналитической теоремы Лиувилля-Арнольда для гамильтоновых систем с односвязным фазовым пространством (с $n = 4 = (3 + 1)$ степенями свободы расширенного формальным временем конфигурационного пространства случая $n = 3$ степеней свободы) имеют следующий вид данных канонического геодезического потока больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4$:

- $(\mathbb{S}^4, F_0, \{F_1 = H, F_2, \dots F_m\}$ – *упорядоченный набор* функций ⇔ общих интегралов и функциональных соотношений ⇔ частных интегралов);
- $\mathbb{S}^4$- 4d-сфера – конфигурационное пространство (вещественное, четномерное, аффинно аналитическое многообразие);
- $F_0 = exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)$ – потенциал
    - канонической непрерывной структуры (связности) на фазовом пространстве
    - канонического односвязного непрерывного (функционального) полного пересечения

  а также
    - каноническая метрика на фазовом пространстве;
    - каноническая односвязно аналитическая мера в фазовом пространстве;
    - каноническая непрерывная структура/связность в фазовом пространстве;
- $F_1 = H$ – гамильтониан (каноническая аналитическая метрика, потенциал канонической аналитической структуры на фазовом пространстве);
- $F_1 = H = |(p + iq)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2 = Trace(so(5, \mathbb{C}) \cong SO(5, \mathbb{C}))$
  – потенциал канонического автодуального (самодвойственного) потока больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{R})$ в канонических аффинных координатах (вещественный случай формального времени);
- $H = |(p + iq + jr)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2 = Trace(su(5, \mathbb{C}) \cong SU(5, \mathbb{C}))$
  – потенциал канонического потока больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ в канонических аффинных координатах (комплексный случай формального времени);
- $\{F_1 = H, F_2, \dots F_m\}$ – полный набор интегралов в инволюции относительно скобки Пуассона, индуцированной потенциалом канонической непрерывной структуры F_0; ограничение данной скобки на пространство фазовых состояний имеет вид отображения $\lim_{p\to\infty} Gal\,(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\ \mathbb{Q}(s|t))$ (см. также п.4 и п.13);
- $m = 20$ (вещественный случай формального аффинного времени), где

$$20 = rk[Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}] = rk(\mathbb{Z}_2(t));$$

- $m = 281$ (комплексный случай формального аффинного времени), где

$$281 = rk[Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}] = rk(\mathbb{Z}_2(s)),$$

  где $\mathbb{Z}_2(t))$ и $\mathbb{Z}_2(s)$ – транзитивные инволюции потоков больших кругов на сферах $\mathbb{S}^4(\mathbb{R})$ и $\mathbb{S}^4(\mathbb{C})$ соответственно.

Теорема 2. Данные односвязно аналитической теоремы Лиувилля-Арнольда (с односвязным фазовым пространством) определяют геометрию фазового потока, представляя его в виде полного пересечения со структурой функционального комплекса из клеток – потоков интегрируемых случаев, аналитически диффеоморфного каноническому отображению

- канонической производной центральной симметрии в 4d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$
- канонической производной гомотетии в пространстве $\mathbb{E}^4$
- *односвязно аналитической* центральной симметрии в 3d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$
- отображению потока больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4$ со структурой канонического функционального конечно-порожденного комплекса
- каноническому вращению сферы $\mathbb{S}^4$ вокруг ее центра (оно автоматически аналитично)
- каноническому качению геометрической точки (материальной точки формальной массы 0) по инерции по сфере $\mathbb{S}^4$.

Следствие (Универсальная интерпретация Пуансо для общих уравнений Эйлера-Пуассона). отображение аналитического качения 4d-сферы $\mathbb{S}^4$ по ее канонической локсодроме вдоль свободной прямой в евклидовом пространстве

- $\mathbb{E}^{20}(\mathbb{R})$ – для формального вещественного времени,
- $\mathbb{E}^{281}(\mathbb{R})$ – для формального комплексного времени.

8. Односвязная изоэнергетическая аналитическая теорема Лиувилля-Арнольда

Теорема 3. Каноническая изоэнергетическая аналитическая теорема Лиувилля-Арнольда описывает канонический функциональный комплекс фазовой динамики уравнений Эйлера-Пуассона и представляет канонический *антиавтодуальный* (*четно самодвойственный*) изоморфизм двойственных потоков больших кругов на стандартной $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$:

$$g^s_{\mathbb{S}^1_{*,great}}(\mathbb{S}^3) \cong g^s_{\mathbb{S}^{1,*}_{great}}(\mathbb{S}^3).$$

Данный изоморфизм является собственным сечением отображения уже *автодуального* (самодвойственного) изоморфизма двойственных потоков больших кругов на стандартной $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$:

$$g^s_{\mathbb{S}^1_{*,great}}(\mathbb{S}^4) \cong g^s_{\mathbb{S}^{1,*}_{great}}(\mathbb{S}^4),$$

который конструктивно реализуется функциональным коммутантом $[Gal\ \mathbb{Q}(s), Gal\ \mathbb{Q}(s)]$, где $s \in \mathbb{C}$ – каноническая комплексная координата на сфере Пуассона (конфигурационном пространстве уравнений Пуассона).

Теорема 4 (связь изоэнергетического и неизоэнергетического односвязных аналитических полных пересечений). Антиавтодуальный изоморфизм функциональных отображений

$$g^t_{\mathbb{S}^1_{*,great}}(\mathbb{S}^3) \cong g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{great}}(\mathbb{S}^3)$$

представляет канонический глобальный изоморфизм касательного и кокасательного пространств к сфере $\mathbb{S}^3$

$$T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3,$$

который интегрируется до автодуального изоморфизма

$$g^t_{\mathbb{S}^0_{*,great}}(\mathbb{S}^4) \cong g^t_{\mathbb{S}^{0,*}_{great}}(\mathbb{S}^4),$$

представляющего

- канонический глобальный изоморфизм касательного и кокасательного пространств к $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$;
- $T\mathbb{S}^4 \cong N\mathbb{S}^4$;
- каноническую гомотетию $4d$-сферы $\mathbb{S}^4$ (она автоматически аналитична в силу автодуальности этого изоморфизма);
- односвязное аналитическое отображение $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ с аналитическим классом гладкости – каноническую односвязную аналитическую структуру на сфере $\mathbb{S}^3$.

Теорема 5 (Фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона как непрерывное полное пересечение).

Фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона представляет фазовый поток тривиального волчка, имеющий структуру *односвязного непрерывного полного пересечения* следующего вида:

- трехмерный шар с канонической непрерывной топологией;
- канонический однородно-изотропный $3d$-шар;
- четырехмерный шар с теоретико-множественной топологией - поточечное представление полного пересечения (его элементы – фазовые очки/состояния);
- однородный $4d$-шар.

Каноническое односвязное непрерывное полное пересечение со структурой группы представляется функциональным комплексом групп и задается следующими эквивалентными точными последовательностями отображений:

$$0 \to \mathbb{Z}_2(s|t) \longrightarrow \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^3 \longrightarrow Mod(\mathbb{T}^3) \to 1$$

$$\mathbb{S}^0 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^4$$

$$(0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{F}_2 \to A_2 \to B_2 \to C_3 \to D_4 \to G_2 \to F_4 \to E_6 \to E_7 \to E_8 \to 1)|_{(\mathbb{Q}(s|t))}, \qquad (1)$$

где

- $\mathbb{Z}_2(s|t)$ – инволюция обратимости по аффинному времени $s|t$ уравнений Эйлера-Пуассона, соответствующая инволютивной симметрии классического гамильтониана данных уравнений;

- $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{F}_2$ – кольцо и поле из 2-х элементов соответственно;

- $s|t$ – аффинный координатный комплекс для канонического вложения полей $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$;

- $\mathbb{T}^i$ – i-мерные топологические торы;

- $Mod(\mathbb{T}^3)$ – пространство модулей торов $\mathbb{T}^3$;

- $\longrightarrow$ – отображение $Gal(\sqrt{5}\mathbb{Q}(s|t))$, имеющее следующие реализации:

    - отображение канонического локсодромического потока больших кругов на $4d$-сфере $\mathbb{S}^4$,
    - отображение канонической прямолинейной обмотки сопровождающего тетраэдра,
    - отображение прямолинейного потока на канонической $3d$-бутылке Клейна,
    - отображение генератора фазового потока (канонической непрерывной монодромии) сопровождающего $2d$-тетраэдра;

- $\mathbb{S}^i$ – i-мерные сферы;

- $A_2, B_2, C_3, D_4, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ – упорядоченная полная классификация простых групп, соответствующая по двойственности Ли, классической классификации простых алгебр Ли с минимальным рангом корневых систем для (не исключительных) алгебр серий A_n, B_n, C_n, D_n;

- $|_{(\mathbb{Q}(s|t))}$- рассмотрение отображений над полем дробно-рациональных функций $\mathbb{Q}(s|t)$.

Теорема 6 (Фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона как фазовый поток тривиального волчка). Фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона представляет фазовый поток тривиального волчка, имеющий структуру односвязного непрерывного полного пересечения в виде специального функционального комплекса (1).

Данный функциональный комплекс отображений обладает следующими свойствами:

- имеет структуру полного пересечения, конструктивно задаваемого потенциалом

$$exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2);$$

- отображение примыкания клеток (отображение дифференциала) в данном функциональном комплексе является отображением фазового потока кинематических уравнений Пуассона представляет отображение;

- *канонической непрерывной гомотетии* в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;

- *канонического центрально-подобного вращения* в пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;

- стандартного (правильного) тетраэдра в пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ относительно его центра, имеющего смысл сопровождающего аналитические волчки тетраэдра.

9. Канонический комплекс общих и частных интегрируемых случаев уравнений Эйлера-Пуассона в структуре их фазового потока как полного пересечения.

Теорема 7 (Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона как аналитическое полное пересечение). Канонический односвязный производный комплекс односвязных аналитических отображений, задаваемый точной последовательностью (1) имеет структуру полного пересечения, конструктивно задаваемого

- скалярным потенциалом – общим интегралом уравнений Эйлера-Пуассона;
- векторным потенциалом – полным набором общих и частных интегралов уравнений Эйлера-Пуассона.

Отображение производного примыкания клеток непрерывного комплекса является отображением фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона как корректной краевой задачи.

При этом ее граничными условиями являются полный набор частных случаев интегрируемости.

Следствие 1. Три классических функционально (над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) независимых первых интеграла уравнений Эйлера-Пуассона определяют структуру *аналитического* полного пересечения на старшей *непрерывной* клетке их фазового пространства, снабженного канонической инвариантной мерой (непрерывной, адиабатической метрикой), определяемой четвертым интегралом.

Следствие 2. Данное полное пересечение имеет смысл аналитического времени (гипотетически - физического времени).

Указанная непрерывная старшая клетка фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона изоморфна односвязным аналитическим *эндоморфизмам* правильного тетраэдра с выделенным центром в трехмерном евклидовом пространстве.

Аффинная размерность *автоморфизмов* старшей непрерывной клетки со структурой полного пересечения равна 3 – рангу нейтрального элемента элементов односвязно аналитических автоморфизмов группы реберных медиан сопровождающего тетраэдра.

«Четвертый» интеграл $exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)$ является потенциалом

- полного пересечения для клетки, являющейся граничной клеткой к непрерывной клетке старшей размерности;
- непрерывного полного пересечения.

Физическим релятивистским смыслом непрерывной старшей клетки является каноническая (абсолютная) система отсчета для фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона.

Механическим смыслом старшей непрерывной клетки является однородный массивный ротор в стабилизированном кардановом подвесе.

Старшая непрерывная клетка имеет смысл канонических граничных условий: она изоморфна орбите множества односвязных аналитических *эндоморфизмов* правильного тетраэдра с выделенным центром в трехмерном евклидовом пространстве.

Данные односвязные аналитические *эндо*морфизмы правильного тетраэдра имеют структуру полного пересечения, полная размерность которого равна 16 – числу *нетривиальных* элементов аналитической (односвязно аналитизированной) группы реберных медиан сопровождающего тетраэдра ($\mathbb{R}$-аналитической четверной группе Клейна $D_{2,an}$).

Утверждение. Группа $D_{2,an}$имеет структуру комплекса; это индуцирует упорядочение ее элементов, представляющее каноническое упорядочение частных случаев интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона.

Три классических интеграла общих уравнений Эйлера-Пуассона и дополнительный функционально независимый с ними интеграл (их четвертый интеграл) $exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2)$ представляют аффинные координаты на отображении канонической односвязной аналитической гомотетии четырехмерного пространства-времени с выделенным центром (эквивалентного стандартной 4d-сфере).

10. Алгебраический и геометрический смысл односвязной аналитической теоремы Лиувилля-Арнольда

Клетки комплекса (1), отвечающие исключительным простым группам («фазово невырожденные клетки» в динамическом контексте), являются *каноническими координатными комплексами* на соответствующих *геометрических динамических* объектах, являющихся инвариантными многообразиями уравнений Эйлера-Пуассона:

- $G_2(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - канонический диагональный цикл
    - на каноническом односвязно аналитическом торе Арнольда (общепринятый термин - «лиувиллев тор», но такие торы введены были Арнольдом в контексте полупрямого действия на них прямолинейного потока/обмотки, чего у Лиувилля не было, да и не могло быть),
    - на канонической функциональной эллиптической кривой,
  - каноническая локсодрома на стандартной 3d-сфере $\mathbb{S}^3$,
  - свободная ориентированная прямая в пространстве $\mathbb{E}^3_{C^0}$ - евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ с канонической непрерывной структурой, индуцированной центральной проекцией локсодромической топологии на стандартной 3d-сфере $\mathbb{S}^3$
  - канонический световой конус в каноническом односвязно аналитическом пространстве-времени;
- $F_4(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - канонический односвязно аналитический поляризованный тор Арнольда,
  - каноническая функциональная эллиптическая кривая,
  - свободная ориентированная плоскость в пространстве $\mathbb{E}^3_{C^0}$,
  - каноническое односвязно аналитическое пространство-время с теоретико-множественной топологией;
- $G_2(\mathbb{Q}(s|t)) \to F_4(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - «каноническая прямолинейная непрерывная» обмотка сферы $\mathbb{S}^4$,
  - каноническая поляризация
    - канонического тора Арнольда,
    - якобиана канонической функциональной эллиптической кривой,
  - каноническая локсодрома на сфере $\mathbb{S}^4$,

   - канонический флаг «свободная ориентированная плоскость||свободная ориентированная прямая» в пространстве $\mathbb{E}^3_{C^0}$,
- $E_6\ (\mathbb{Q}(s|t))$ –
   - канонический аддитивно-мультипликативный (четный) цикл канонического блока торов Арнольда,
   - четный (эйлеров) цикл канонического прямолинейного потока на якобиане канонической функциональной эллиптической кривой,
   - четное непрерывное полупространство в $\mathbb{E}^3_{C^0}$,
   - каноническое однородное односвязно аналитическое пространство-время;
- $E_7(\mathbb{Q}(s|t))$ –
   - нечетный (лагражев) цикл на каноническом прямолинейном потоке на якобиане канонической функциональной эллиптической кривой,
   - канонический мультипликативно-аддитивный (нечетный) цикл канонического блока торов Арнольда,
   - нечетное непрерывное полупространство в пространстве $\mathbb{E}^3_{C^0}$
   - каноническое изотропное односвязно аналитическое пространство-время;
- $E_6(\mathbb{Q}(s|t) \to E_7(\mathbb{Q}(s|t))$ –
   - канонические полярные координаты (упорядоченные переменные «действие-угол») на стандартной 4d-сфере $\mathbb{S}^4$,
   - упорядоченные канонические циклы на потоке больших кругов на «канонической прямолинейной непрерывной» обмотке сферы $\mathbb{S}^4$;
- $E_8(\mathbb{Q}(s|t))$ –
   - *фазовый поток тривиального волчка*,
   - канонический блок торов Арнольда (общепринятый термин «лиувиллев блок»),
   - канонический прямолинейный поток на якобиане канонической функциональной эллиптической кривой,
   - каноническое изотропно-однородное односвязно аналитическое пространство-время,
   - каноническое непрерывно аналитизированное пространство-время - каноническая непрерывная связность (аналитическое поле Хиггса);
- $E_6(\mathbb{Q}(s|t) \to E_7(\mathbb{Q}(s|t) \to E_8(\mathbb{Q}(s|t))$ –
   - канонические полярные координаты на сфере $\mathbb{S}^4$,
   - канонический поток больших кругов на сфере $\mathbb{S}^5$,
   - «каноническая прямолинейная» обмотка сферы $\mathbb{S}^5$,
   - каноническая прямолинейная обмотка канонического односвязно аналитического блока аналитических торов Арнольда,
   - фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона, состоящее из непрерывно когерентных конфигурационно-спиновых состояний (фазовых точек);
- $Ad\ E_8(\mathbb{Q}(s|t))$ –
   - *фазовый поток общего волчка*,
   - канонический односвязный производный поток больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4$,
   - односвязно аналитический механизм Хиггса («поле-комплекс генерирует (производит) частицу-комплекс».

Следствие. В силу наличия структуры полного пересечения у фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона эти уравнения аналитически интегрируются полностью (в том числе, в классическом смысле интегрируемости по Лиувиллю-Арнольду).

11. Алгебраический и механический смысл аналитической полной интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона.

Каноническое односвязное непрерывное полное пересечение со структурой алгебры представляется функциональным комплексом алгебр, канонически двойственным комплексу групп (1):

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{F}_2 \longrightarrow A_2^* \to B_2^* \to C_3^* \to D_4^* \to g_2 \to f_4 \to e_6 \to e_7 \to e_8 \to 0)|_{(\mathbb{Q}(s|t))}, \tag{2}$$

Клетки комплекса алгебр (2), отвечающие *исключительным* простым алгебрам («фазово невырожденные клетки» в динамическом контексте), являются *каноническими координатными комплексами* на соответствующих *динамических механических* объектах – гамильтоновых *динамических* подсистемах системы уравнений Эйлера-Пуассона:

- $g_2(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - *каноническое время фазового потока тривиального волчка*,
  - каноническое *аналитизированное двояко-асимптотическое движение сепаратрисы волчка Эйлера*;
- $f_4(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - *конфигурационное пространство тривиального волчка*,
  - каноническая *аналитизированная сепаратриса фазовой динамики волчка Эйлера*;
- e_6 $(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - *пространство скоростей тривиального волчка*,
  - каноническое непрерывное расщепление аналитизированной сепаратрисы;
- $e_7(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - *пространство импульсов (угловых скоростей, <u>ко</u>скоростей) тривиального волчка*,
  - каноническое пространство пары противоположно ориентированных аналитизированных невырожденных гиперболических движений из сепаратрисы;
- $e_8(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - *кинетический момент тривиального волчка,*
  - *алгебра эндоморфизмов якобиана канонической функциональной эллиптической кривой над полем* $\mathbb{Q}(s|t)$;

  а также:
  - каноническое пространство непрерывных аналитизаций ветвлений решений общего возмущения волчка Эйлера в плоскости формального аффинного $\mathbb{C}$-времени,
  - каноническое однородно-изотропное («непрерывное односвязно аналитическое») пространство-время,
  - фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона, состоящее из непрерывно когерентных спиново-конфигурационных состояний (фазовых векторов),
  - аналитический бозон Хиггса как *топологический комплекс* аналитических элементарных частиц;
- $ad\ e_8(\mathbb{Q}(s|t))$ –
  - *фазовый поток волчка Ковалевской (как общего <u>аналитического</u> волчка),*
  - каноническое пространство аналитизаций ветвлений решений общего возмущения волчка Эйлера в плоскости формального аффинного $\mathbb{C}$-времени,
  - фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона, состоящий из односвязно аналитических когерентных конфигурационно-спиновых состояний, «упакованных» в канонический односвязно аналитический 3d-шар,
  - канонический односвязный производный поток больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4$,
  - дуальный односвязно аналитический механизм Хиггса («частица-комплекс генерирует (производит) поле-*ко*комплекс»).

Комментарий 1. Образом односвязного непрерывного возмущения сепаратрисы волчка Эйлера является

- каноническое фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона как пространство когерентных (точечно $\leftrightarrow$ векторно инцидентных) конфигурационно$\leftrightarrow$спиновых состояний;
- фазовый поток тривиального волчка;
- стабилизированный ротор в кардановом подвесе;
- фазовое пространство математического маятника в вертикальном равновесии.

Комментарий 2. Образом односвязного аналитического возмущения сепаратрисы волчка Эйлера является

- каноническое пространство классов эквивалентности когерентных конфигурационно⟷спиновых состояний фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона;
- фазовый поток волчка Ковалевской;
- инерциальное вращение ротора в стабилизированном кардановом подвесе;
- фазовый поток математического маятника в вертикальном равновесии;
- каноническая двойственность на множестве аналитических волчков:

  {*общий <u>аналитический</u> эллипсоид инерции*} ⟷{*общий <u>аналитический</u> гирационный эллипсоид*}

12. Соответствия объектов классической (аффинной) теоремы Лиувилля-Арнольда с объектами ее аналитической (проективной) версии в случае трех степеней свободы

Приведем соответствия, эквивариантно корректирующие объекты классической теоремы Лиувилля-Арнольда.

Изоэнергетический случай (пуассоновы автоморфизмы):

{лиувиллевы торы (трехмерные торы $\mathbb{T}^3$)}
↓
{стандартная $3d$-сфера $\mathbb{S}^3$ (универсальный односвязно аналитический $3d$-тор $\mathbb{T}^3_{an}$),

где

$$\mathbb{T}^3_{an} \cong Image\big(id\big(Gal\ \mathbb{Q}(t)\big) \longrightarrow T_*\mathbb{S}^3\big);$$

{расслоенная прямолинейная обмотка $x(s|t)$ на выделенном торе $\mathbb{T}^3$}
↓
{поток больших кругов $g^t_{\mathbb{S}^1_{great}}(\mathbb{S}^3)$ на сфере $\mathbb{S}^3$ - $\mathbb{T}^3_{an}/x_{an}(s|t)$,

где

$$(g^t_{\mathbb{S}^1_{great,*}}(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{T}^3_{an}/x_{an}(s|t)) \cong Image(Gal\ \mathbb{Q}(t) \longrightarrow T_*\mathbb{S}^3)$$

{лиувиллев блок $\mathbb{L}^3$} ⟶{поток больших *ко*кругов $\mathbb{S}^1_{*,greate}$ на сфере $\mathbb{S}^3$, обозначаемый $\mathbb{L}^3_{an}$ }

$$(g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{great,*}}(\mathbb{S}^3) \cong \mathbb{L}^3_{an}) \cong Image(id([Gal\ \mathbb{Q}(t), Gal\ \mathbb{Q}(t)]) \longrightarrow (T_*\mathbb{S}^3 \cong T^*\mathbb{S}^3));$$

{(*<u>3d+2d</u>*)*<u>-мерное аффинное</u>* лиувиллево слоение (расслоение лиувиллевого блока на фазовые траектории)}
↓
{*<u>функциональное проективное</u>* пространство орбит канонической двойственности (канонического изоморфизма) I}

где

$$I \cong \{g^t_{\mathbb{S}^1_{*,greate}}(\mathbb{S}^3) \cong g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{greate}}(\mathbb{S}^3)\};$$

$$Image(I) \cong g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{great,*}}(\mathbb{S}^3) \cong Image([Gal\ \mathbb{Q}(t), Gal\ \mathbb{Q}(t)] \longrightarrow (T_*\mathbb{S}^3 \cong T^*\mathbb{S}^3));$$

{формальные уравнения Гамильтона}
↓
{уравнения Эйлера-Пуассона⇔$d(Image(I))$}.

Неизоэнергетический случай (симплектические автоморфизмы); аналогичен изоэнергетическому случаю; поэтому приводим его в более кратком виде:

{лиувиллевы торы ($4d$-мерные торы $\mathbb{T}^4$)}
↓
{стандартная $4d$-сфера $\mathbb{S}^4$ (универсальный аналитический $4d$-тор)};

{прямолинейные обмотки лиувиллевых торов (выделенные прямолинейные обмотки на выделенных тора $\mathbb{T}^4$)}
↓
{выделенные большие круги $\mathbb{S}^1_{*,great}$ на сфере $\mathbb{S}^4$};

{расслоенная прямолинейная обмотка на выделенном торе $\mathbb{T}^4$}
↓
{поток больших кругов $g^t_{\mathbb{S}^1_{great}}(\mathbb{S}^4)$ на сфере $\mathbb{S}^4$},

где

$$g^t_{\mathbb{S}^1_{great,*}}(\mathbb{S}^4) \cong Image(Gal\ \mathbb{Q}(t) \longrightarrow T_*\mathbb{S}^4)$$

{*аффинный* лиувиллев блок $\mathbb{L}^4$} $\longrightarrow$ {$\mathbb{L}^4_{an}$– *проективный* поток больших *ко*кругов $\mathbb{S}^1_{*,greate}$ на сфере $\mathbb{S}^4$}

где

$$(g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{great,*}}(\mathbb{S}^4) \cong \mathbb{L}^4_{an}) \cong Image([Gal\ \mathbb{Q}(t), Gal\ \mathbb{Q}(t)] \ \longrightarrow (T_*\mathbb{S}^4 \cong T^*\mathbb{S}^4))$$

{*3d+3d)-мерное афинное* лиувиллево слоение (расслоение лиувиллевого блока на фазовые траектории)}
↓
{орбиты *функциональной проективной само*двойственности (канонического изоморфизма) I},

где

$$I \cong g^t_{\mathbb{S}^1_{*,greate}}(\mathbb{S}^4) \cong g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{greate}}(\mathbb{S}^4);$$

$$Image(I) \cong g^t_{\mathbb{S}^{1,*}_{great,*}}(\mathbb{S}^4) \cong Image([Gal\ \mathbb{Q}(t), Gal\ \mathbb{Q}(t)] \ \longrightarrow (T_*\mathbb{S}^4 \cong T^*\mathbb{S}^4)).$$

{формальные уравнения Гамильтона}
↓
{дифференциальные уравнения Ковалевской $\Leftrightarrow d(Image(I))$}.

13. Единая схема доказательства сформулированных утверждений.

Суть единого доказательства теорем 2-7 состоит в прямом построении геометрической модели канонического аналитического полного пересечения и его канонической координатизации. Такой моделью является введение канонических координат «сопровождающих координат» на изоморфизме I – групповой диагонали двойственных бигрупповых упорядочений (пересчетов) точек целочисленной решетки $\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4$

$$Sp_{4d} \overset{I}{\cong} Sp^*_{4d},$$

где изоморфизм I имеет структуру группы Галуа специального расширения поля $\mathbb{Q}(s|t)$: его генератор имеет вид:

$$I \cong Gal(\sqrt{5}\mathbb{Q}(s|t)).$$

Изоморфизм I в силу своего определения имеет естественную структуру функционального полного пересечения /функционального комплекса и представляет следующие эквивалентные отображения:

- канонического центрально-подобного вращения в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$;
- канонической центральной гомотетии в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$;
- непрерывной монодромии сопровождающего тетраэдра.

Замечание. Генератором группового изоморфизма I является изоморфизм $Sp_{3d} \cong Sp_{3d}^*$ (канонического упорядочения (рекурсивного пересчета) узлов трехмерной целочисленной решетки), орбитой которого является каноническая трехмерная бутылка Клейна (см. [1]).

Целочисленное соотношение, определяющее схемы корней простых алгебр Ли имеет вид (см., например, [9])

$$n_{\alpha,\beta} \cdot n_{\beta,\alpha} = 4cos^2\varphi \tag{3}$$

и является аффинными координатами на упорядоченном изоморфизме

$$I \cong \{Sp_{4d,*}\,(4cos^2\varphi) \cong Sp_{4d}^*(n_{\alpha,\beta} \cdot n_{\beta,\alpha})\}.$$

Отображение I является образом корректно определенной экспоненты

$$I \cong exp(Sp_{2d.*} \cong Sp_{2d}^*) \cong Sp_{2d} \otimes_{\frac{i}{2}(s|t)} Sp_{2d}^*$$

где

$$Sp_{2d}\,(|\mathbb{F}_2^+|cos\varphi) \cong Sp_{2d}^*(n_{\alpha,\beta});$$

$$Sp_{2d}^*(|\mathbb{F}_2^\times|cos\varphi) \cong Sp_{2d}^*\left(n_{\beta,\alpha}\right),$$

где

- Sp_{2d}, Sp_{2d}^* – канонические полярные координаты на отображении центрально-подобного вращения (ЦПВ) на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$;
- $\mathbb{F}_2^+$ – поле из 2-х элементов;
- $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$ - оператор самодвойственности
    - центрально-подобного вращения в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$
    - канонической гомотетии в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$
    - канонического локсодромического потока больших кругов на 4d-сфере $\mathbb{S}^4$
    - правильного 2d-тетраэдра в евклидовом 3d-пространстве $\mathbb{E}^3$; при этом:
        - $\frac{i}{2}$ – центр непрерывно монодромного правильного 2d-тетраэдра,
        - $\frac{i}{2}(s|t)$ – выделенная реберная медиана непрерывно монодромного правильного 2d-тетраэдра.

Непрерывная часть аналитической коррекции соотношения (3) (его функциональный групповой центр), имеющая вид

$$(n_{\alpha,\beta} \cdot n_{\beta,\alpha} = 4cos^2\varphi)(mod\ I)$$

определена над функциональным полем дробно-рациональных функций $\mathbb{Q}(s|t)$.

В силу

- точности последовательности отображений (1);
- $I \cong Zentr([Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})},\ Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}]);$

- структуры полного пересечения у изоморфизма I;
- Галуа-инвариантной структуры

$$I \cong Gal(\sqrt{5}\mathbb{Q}(s|t)) \cong Gal(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\ \mathbb{Q}(s|t)|_{p=5}) \cong$$

$$\cong Generator(\lim_{p\to\infty} Gal(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\ \mathbb{Q}(s|t))$$

(это функциональный аналог отображения модулярной параметризации Уайлса (см. [7]))

образ изоморфизма I обладает

- структурой полного пересечения;
- структурой функционального модуля Галуа (с тензорным произведением $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$);
- базисом конечного ранга (следствие равенства числу 281 ранга производного (эквивалентно – непрерывного) отображения центральной симметрии $[Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})},\ Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}] \cong \{e_8(\mathbb{C}) \cong E_8(\mathbb{C})\}$ четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^4(\mathbb{C})$).

Эти свойства изоморфизма *I* эквивалентны данным

- *односвязно непрерывной полной интегрируемости* уравнений Эйлера-Пуассона;
- *точной разрешимости* в специальных L-функциях – L-функциях эллиптических кривых над полем рациональных чисел (см. [1]) кинематических уравнений Пуассона (граничных условий уравнений Эйлера-Пуассона).

14. Интерпретации изоморфизма фундаментальной двойственности

Комментарий 1. Изоморфизм *I* имеет следующие реализации:

геометро-динамические:

канонический генератор

- аналитической самодвойственности правильного2d-тетраэдра;
- периодического *качения-вращения* трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$ по прямой $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- периодического *качения* четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4$ по прямой $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- *вращения* четырехмерной сферы $\mathbb{S}^4$ вокруг своего центра;

механические:

канонический генератор

- фазовой динамики центрального сечения общего эллипсоида инерции (оно круговое);
- сопровождающего аналитические волчки тетраэдра;
- стабилизированного ротора в стабилизированном кардановом подвесе.

Комментарий 2.

Точная последовательность отображений (1) представляет

- фазовый поток тривиального волчка;
- фазовое пространство уравнений Эйлера-Пуассона

как топологический функциональный комплекс.

Комментарий 3.

Точная последовательность отображений (1) представляет

- каноническое непрерывное пространство-время;
- каноническое однородно-изотропное пространство;
- каноническая (абсолютная) система отсчета для уравнений Эйлера-Пуассона;
- каноническое *односвязное* непрерывное разрешение особенности фазового потока классического математического маятника в точке его закрепления посредством отображения обратимости по времени его гамильтониана.

15. Структура односвязного аналитического полного пересечения

Теорема 8. Канонический комплекс интегрируемых случаев уравнений Эйлера-Пуассона представляется точной последовательностью отображений – комплексом односвязно аналитических простых групп Ли (эквивалентно по двойственности Ли – односвязно аналитических простых алгебр):

$$x(t) \longrightarrow \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^3 \longrightarrow \mathbb{L}^4 \longrightarrow exp\,\mathbb{L}^4$$

$$(0 \to A_2 \to B_2 \to C_3 \to D_4 \to G_2 \to F_4 \to E_6 \to E_7 \to E_8 \to Ad\,E_8 \to 0)|_{(\mathbb{Q}(s|t))} \quad (4)$$

Эта точная последовательность представляет

- фазовый поток сопровождающего аналитические волчки 2d-тетраэдра;
- отображение односвязной аналитической самодвойственности правильного 2d-тетраэдра;
- односвязный производный фазовый поток тривиального волчка.

Схема доказательства. По аналогии с вышеприведенной схемой доказательства теоремы о структуре непрерывного полного пересечения доказательство состоит в описании канонической экспоненциальной структуры на 4d-сфере $\mathbb{S}^4$.

Шаг 1. Вводятся канонические «сопровождающие координаты» на корректно определенной экспоненте

$$exp(Sp_{4d,*} \cong Sp_{4d}^*).$$

Шаг 2. Устанавливается, что данный изоморфизм

- имеет естественную структуру односвязного аналитического полного пересечения;
- представляет орбиту односвязной аналитической монодромии сопровождающего аналитические волчки 2d-тетраэдра.

Эти свойства производного изоморфизма I эквивалентны данным

- *односвязно аналитической* полной интегрируемости;
- *точной разрешимости* в специальных L-функциях – экспонентах L-функций эллиптических кривых над полем рациональных чисел (см. [1])

динамических уравнений Эйлера-Пуассона.

Комментарии. Точная последовательность (4) представляет

- канонические аналитические координаты на 4d-решетке $\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4$;
- канонические координаты на прямолинейном потоке на 3d-бутылке Клейна (каноническом глобальном натуральном параметре на больших кругах коразмерности 1 на 4d-сфере $\mathbb{S}^4$);
- каноническое односвязное аналитическое разрешение особенности вертикального равновесия классического математического маятника посредством отображения обратимости по времени его гамильтониана.

16. Геометрия канонической аналитической теоремы Лиувилля-Арнольда

Теорема 9. Симметрия $Ad\ E_8(\mathbb{Q}(s|t))$ эквивалентна следующим эквивалентным отображениям:

- односвязному производному отображению потока больших кругов на стандартной 4d-сфере $\mathbb{S}^4$;
- отображению самодвойственности потока больших кругов на стандартной 4d-сфере $\mathbb{S}^4$
- отображению общей односвязной аналитической монодромии
  - правильного 2d-тетраэдра T^2
  - выделенной реберной медианы правильного 2d-тетраэдра T^2;
- отображению аналитической самодвойственности 2d-тетраэдра T^2/m, где m – выделенная реберная медиана тетраэдра T^2.

Симметрия присоединенного представления $Ad\ e_8(\mathbb{Q}(s|t))$ эквивалентна

- производному отображению потока больших диаметров стандартной 4d-сферы $\mathbb{S}^4$
- производной (присоединенной) симметрии двойственности $e_8(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong E_8(\mathbb{C}|\mathbb{R})$
- отображению самодвойственности потока больших диаметров стандартной 4d-сферы $\mathbb{S}^4$
- отображению аналитической самодвойственности 2d-тетраэдра T^2/O, где O – центр тетраэдра T^2

Симметрия $Ad(e_8(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong E_8(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$ эквивалентна

- отображению аналитической самодвойственности правильного 3d-тетраэдра T^3/O, где O - центр тетраэдра T^3;
- отображению канонической двойственности потока больших диаметров и больших кругов на сфере $\mathbb{S}^4$;
- каноническому прямолинейному потоку на трехмерной бутылке Клейна.

Теорема 10. Пространство больших кругов на 4d-сфере $\mathbb{S}^4$ является орбитой односвязной аналитической гомотетии правильного 2d-тетраэдра T^2 с выделенным центром в 3d-евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$.

Комментарий. Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона имеет следующие интерпретации:

- статистический ансамбль конфигурационно-спиново когерентных фазовых состояний волчков;
- геодезический поток больших кругов на 4d-сфере $\mathbb{S}^4$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Абраров Д.Л. Точная разрешимость уравнений Эйлера-Пуассона: дзета-функции и глобальная динамика. Москва, Научный мир, 2021, 614 с.

[2] Абраров Д.Л. The canonical analytical three-dimensional sphere as the orbit of the phase flow of the

Euler-Poisson equations and the generalized Dzhanibekov effect// Intellectual Archive, natural science, mathematics, 24 p.
www.IntellectualArchive.com/getfile.php?file=N19RNiD5lL6&orig_file=3DSphereEulerPoissonDzhanibekov.pdf

[3] Abrarov D.L. Canonical integrability of the Euler-Poisson equations on the canonical analytic Klein bottle: the context of gravity and real time // Intellectual Archive, natural science, mathematics, 24 p.
www.IntellectualArchive.com/getfile.php?file=N19RNiD5lL6&orig_file=CanonicalIntegrabilityEP.pdf

[4] Abrarov D.L. A Galois-theory scheme of the Euler-Poisson equations and its pendulum interpretation in the canonical Lobachevsky function space// Intellectual Archive, natural science, mathematics, 58 p.
www.IntellectualArchive.com/getfile.php?file=6rgJmFMlNlF&orig_file=GaloisTheoryEulerPoisson Eqs.pdf

[5] Abrarov D.L. General solution $exp\,\zeta(s,\Delta_{12}(q))$ of the Euler-Poisson equations as the solution of the functional quaternion q-pendulum and canonical functional exponent// Intellectual Archive, natural science, mathematics, 70 p.
www.IntellectualArchive.com/getfile.php?file=6rgJmFMlNlF&orig_file=AbrarovDLq-pend.pdf

[6] Abrarov D.L. General solution of the Euler-Poisson equations as the canonical functional exponent associated with the Riemann zeta-function in real-time context//Intellectual Archive, natural science, mathematics, 78 p.
www.IntellectualArchive.com/getfile.php?file=6rgJmFMlNlF&orig_file=AbrarovDLexp.pdf

[7] Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem// Ann. Math. (2). 1995, V.141. p. 443-551.

[8] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1974. 432 с.

[9] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.; МЦНМО, 2003, 216 с.