Algorithm for structure constants
Algoritmo por konstantoj de strukturo

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II

Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

23–a de aŭgusto, 2011

Resumo

In a n-dimensional Lie algebra, random numerical values are assigned by computer to $n(n-1)$ especially selected structure constants. An algorithm is then created, which calculates without ambiguity the remaining constants obeying the Jacobi conditions. Differently from others, this algorithm is suitable even for poor personal computer.

En n-dimensia algebro de Lie, hazardaj numeraj valoroj estas asignitaj per komputilo al $n(n-1)$ speciale elektitaj konstantoj de strukturo. Tiam algoritmo estas kreita, kalkulante senambigue la ceterajn konstantojn obeante kondiĉojn de Jacobi. Malsimile al aliaj algoritmoj, tiu ĉi taŭgas eĉ por malpotenca komputilo.

1 Enkonduko

Bonkonate, bazaj vektoroj e_i de n-dimensia algebro de Lie obeas regulon [1, paĝo 383]

1 Introduction

As is well known, the basis vectors e_i of a $n-$dimensional Lie algebra obey rule [1, page 383]

$$[e_i, e_j]_- = C_{ij}{}^k e_k \,, \tag{1}$$

kie indicoj varias de 1 al n, kaj kie konstantoj de strukturo $C_{ij}{}^k$ estas antisimetriaj en malsupraj indicoj: $C_{ij}{}^k = -C_{ji}{}^k$. Ni profitas tiun antisimetrion por skribi nur konstantojn $C_{ij}{}^k$ havante $i < j$. Plue, ili devas obei kondiĉojn de Jacobi

where the indices vary from 1 to n, and where the constants of structure $C_{ij}{}^k$ are antisymmetric in the lower indices: $C_{ij}{}^k = -C_{ji}{}^k$. We profit from that antisymmetry to write only constants $C_{ij}{}^k$ having $i < j$. Still, they must obey the Jacobi conditions

$$C_{ij}{}^l C_{kl}{}^m + C_{jk}{}^l C_{ij}{}^m + C_{ki}{}^l C_{jl}{}^m = 0 \,. \tag{2}$$

Tiuj kondiĉoj estas antisimetriaj en la 3 indicoj i, j, k, do ili agas se nur $n \geq 3$.

Se $n = 1$, tiam la algebro havas nur 1 bazan vektoron, kaj ĝia nura konstanto de strukturo estus ${C_{11}}^1$, nula.

Se $n = 2$, tiam 2 konstantoj povas ekzisti, sendependaj kaj ne-nulaj: ${C_{12}}^1$ kaj ${C_{12}}^2$.

Se $n = 3$, tiam 9 ne-nulaj konstantoj povas ekzisti: ${C_{12}}^m$, ${C_{13}}^m$, ${C_{23}}^m$, kun $m = 1, 2, 3$. Tamen la 3 kondiĉoj de Jacobi

These conditions are antisymmetric in the 3 indices i, j, k, so they act only if $n \geq 3$.

If $n = 1$, the algebra has only 1 basis vector, and its only structure constant would be ${C_{11}}^1$, null.

If $n = 2$, two structure constants can occur, independent and non-null: ${C_{12}}^1$ and ${C_{12}}^2$.

If $n = 3$, nine non-null structure constants can occur: ${C_{12}}^m$, ${C_{13}}^m$, ${C_{23}}^m$, with $m = 1, 2, 3$. But the 3 Jacobi conditions

$$ {C_{12}}^k {C_{3k}}^m + {C_{23}}^k {C_{1k}}^m + {C_{31}}^k {C_{2k}}^m = 0 \,, \quad m = 1, 2, 3 \tag{3} $$

reduktas tiujn 9 konstantojn al nur 6 sendependaj.

Se $n = 4$, tiam 24 ne-nulaj konstantoj de strukturo povas ekzisti: ${C_{12}}^m$, ${C_{13}}^m$, ${C_{14}}^m$, ${C_{23}}^m$, ${C_{24}}^m$, ${C_{34}}^m$, estante $m = 1, 2, 3, 4$. Kaj la kondiĉoj de Jacobi estas 16:

reduce these 9 constants to only 6 independent.

If $n = 4$ then 24 non-null structure constants can exist: ${C_{12}}^m$, ${C_{13}}^m$, ${C_{14}}^m$, ${C_{23}}^m$, ${C_{24}}^m$, ${C_{34}}^m$, with $m = 1, 2, 3, 4$. And the Jacobi conditions are 16:

$$ \begin{aligned} {C_{12}}^k {C_{3k}}^m + {C_{23}}^k {C_{1k}}^m + {C_{31}}^k {C_{2k}}^m &= 0 \,, \\ {C_{12}}^k {C_{4k}}^m + {C_{24}}^k {C_{1k}}^m + {C_{41}}^k {C_{2k}}^m &= 0 \,, \\ {C_{13}}^k {C_{4k}}^m + {C_{34}}^k {C_{1k}}^m + {C_{41}}^k {C_{3k}}^m &= 0 \,, \\ {C_{23}}^k {C_{4k}}^m + {C_{34}}^k {C_{2k}}^m + {C_{42}}^k {C_{3k}}^m &= 0 \,, \end{aligned} \tag{4} $$

kun $m = 1, 2, 3, 4$. Ni povus pensi, ke tiuj 16 kondiĉoj reduktas la 24 konstantojn de strukturo al nur $24 - 16 = 8$ sendependaj, sed tio ne veriĝas. Fakte, nur 12 el tiuj kondiĉoj estas sendependaj, tiom reduktante de 24 al $24 - 12 = 12$ la nombron de sendependaj konstantoj de strukturo.

Tiu ĉi artikolo montras, ke en n-dimensia algebro de Lie, la plejgranda nombro de konstantoj de strukturo kies numerajn valorojn oni povas hazarde elekti estas $n(n-1)$. Por tio, ni prezentas algoritmon malkovrante neambigue la pluajn $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ konstantojn de strukturo, kondiĉe ke tiuj $n(n-1)$ konstantoj estas konvene elektitaj.

Antaŭe verki la okazon de arbitra n, la sekvanta sekcio analizas detale la okazon $n = 4$. Tiu analizo montras kiel sinsekvaj sistemoj de n linearaj ekvacioj por n variabloj aperas kaj estas solvitaj, laŭlonge la algoritmo.

with $m = 1, 2, 3, 4$. We could think that these 16 conditions reduce the 24 structure constants to only $24 - 16 = 8$ independent, but that is not true. In fact, only 12 of these conditions are independent, so reducing from 24 to $24 - 12 = 12$ the number of independent structure constants.

This article shows that, in a n-dimensional Lie algebra, the maximum number of structure constants whose numerical values one can randomly choose is $n(n-1)$. To that end, we present an algorithm that uncovers unambiguously the remaining $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ structure constants, provided these $n(n-1)$ constants are conveniently chosen.

Before working the case of arbitrary n, the next section analyses with detail the case $n = 4$. That analysis shows how consecutive systems of n linear equations for n variables appear and are solved, in the course of the algorithm.

2 Se $n = 4$

Ni interkonsentas la jenan notacion por kondiĉoj de Jacobi:

2 If $n = 4$

We agree the following notation for Jacobi conditions:

$$J_{abc}{}^m := \left(C_{ab}{}^k C_{ck}{}^m + C_{bc}{}^k C_{ak}{}^m + C_{ca}{}^k C_{bk}{}^m = 0 \right) \; ; \tag{5}$$

kaj ni profitas ilian antisimetrion por uzi nur ekvaciojn $J_{abc}{}^m$ kun $a < b < c$.

Ni vidu kio okazas en 4-dimensia algebro de Lie se ni faras komputilo hazarde elekti numerajn valorojn por konstantoj de strukturo havante malsupran indicon 1. Tiam la 12 konstantoj $C_{1j}{}^k$ kun $j = 2, 3, 4$ kaj $k = 1, 2, 3, 4$ estos numeroj, ekde tie ĉi.

Skribu la 4 ekvaciojn $J_{123}{}^m$:

and we profit their antisymmetry to use only the equations $J_{abc}{}^m$ with $a < b < c$.

Let us see what happens in a 4-dimensional Lie algebra if we make a computer choose random numerical values for the structure constants with one lower indice 1. Then the 12 constants $C_{1j}{}^k$ with $j = 2, 3, 4$ and $k = 1, 2, 3, 4$ will be numbers, from here on.

Write the 4 equations $J_{123}{}^m$:

$$\begin{array}{lrcl}
J_{123}{}^1 : & \alpha_0 + \alpha_m C_{23}{}^m + \alpha_5 C_{24}{}^1 + \alpha_6 C_{34}{}^1 & = & 0, \\
J_{123}{}^2 : & \beta_0 + \beta_m C_{23}{}^m + \beta_5 C_{24}{}^2 + \beta_6 C_{34}{}^2 & = & 0, \\
J_{123}{}^3 : & \gamma_0 + \gamma_m C_{23}{}^m + \gamma_5 C_{24}{}^3 + \gamma_6 C_{34}{}^3 & = & 0, \\
J_{123}{}^4 : & \delta_0 + \delta_m C_{23}{}^m + \delta_5 C_{24}{}^4 + \delta_6 C_{34}{}^4 & = & 0,
\end{array} \tag{6}$$

kie $m = 1, 2, 3, 4$ kaj grekaj simboloj estas numeroj. Ni rimarkas, ke tiuj 4 ekvacioj estas linearaj por ĉiuj konstantoj $C_{ij}{}^k$ kun $i \neq 1$. Ni solvas tiujn 4 ekvaciojn $J_{123}{}^m$ por la 4 konstantoj $C_{23}{}^m$. Tiuj ĉi fariĝas linearaj kombinoj de la 8 konstantoj $C_{24}{}^m$ kaj $C_{34}{}^m$:

where $m = 1, 2, 3, 4$ and greek symbols are numbers. We note that these 4 equations are linear for all constants $C_{ij}{}^k$ with $i \neq 1$. We solve these 4 equations $J_{123}{}^m$ for the 4 constants $C_{23}{}^m$. These become linear combinations of the 8 constants $C_{24}{}^m$ and $C_{34}{}^m$:

$$\begin{array}{rcl}
C_{23}{}^1 & = & \epsilon_0 + \epsilon_m C_{24}{}^m + \epsilon_{m+4} C_{34}{}^m, \\
C_{23}{}^2 & = & \eta_0 + \eta_m C_{24}{}^m + \eta_{m+4} C_{34}{}^m, \\
C_{23}{}^3 & = & \iota_0 + \iota_m C_{24}{}^m + \iota_{m+4} C_{34}{}^m, \\
C_{23}{}^4 & = & \kappa_0 + \kappa_m C_{24}{}^m + \kappa_{m+4} C_{34}{}^m,
\end{array} \tag{7}$$

kie $m = 1, 2, 3, 4$ kaj grekaj simboloj estas numeroj. Ni metas esprimojn (7) de $C_{23}{}^m$ en la 4 ekvacioj $J_{124}{}^m$, kaj refoje ricevas linearecon por $C_{24}{}^p$ kaj $C_{34}{}^q$:

where $m = 1, 2, 3, 4$ and greek symbols are numbers. We insert the expressions (7) of $C_{23}{}^m$ in the 4 equations $J_{124}{}^m$, and again obtain linearity for $C_{24}{}^p$ and $C_{34}{}^q$:

$$\begin{array}{lrcl}
J_{124}{}^1 : & \lambda_0 + \lambda_m C_{24}{}^m + \lambda_{m+4} C_{34}{}^m & = & 0, \\
J_{124}{}^2 : & \mu_0 + \mu_m C_{24}{}^m + \mu_{m+4} C_{34}{}^m & = & 0, \\
J_{124}{}^3 : & \nu_0 + \nu_m C_{24}{}^m + \nu_{m+4} C_{34}{}^m & = & 0, \\
J_{124}{}^4 : & \pi_0 + \pi_m C_{24}{}^m + \pi_{m+4} C_{34}{}^m & = & 0,
\end{array} \tag{8}$$

kie $m = 1, 2, 3, 4$ kaj la grekaj simboloj estas numeroj. Ni solvas tiujn 4 ekvaciojn por ricevi la 4 variablojn ${C_{24}}^m$, kiuj fariĝas linearaj kombinoj de la 4 variabloj ${C_{34}}^m$:

where $m = 1, 2, 3, 4$ and the greek symbols are numbers. We solve these 4 equations for the 4 variables ${C_{24}}^m$, that become linear combinations of the 4 variables ${C_{34}}^m$:

$$\begin{aligned} {C_{24}}^1 &= \rho_0 + \rho_m {C_{34}}^m \quad , \qquad & {C_{24}}^2 &= \sigma_0 + \sigma_m {C_{34}}^m , \\ {C_{24}}^3 &= \tau_0 + \tau_m {C_{34}}^m \quad , \qquad & {C_{24}}^4 &= \phi_0 + \phi_m {C_{34}}^m , \end{aligned} \tag{9}$$

kie $m = 1, 2, 3, 4$ kaj la grekaj simboloj estas numeroj. Fine, ni metas tiujn kombinojn de ${C_{34}}^m$ en la 4 kondiĉoj de Jacobi ${J_{134}}^m$, kaj solvas la linearajn ekvaciojn. Tiel ni ricevas la numerajn valorojn de la 4 konstantoj ${C_{34}}^m$. Sekve, ni returne kalkulas la valorojn de ${C_{24}}^m$ uzante (9), kaj de ${C_{23}}^m$ uzante (7).

Oni vidas, ke la serio de la algoritmo por $n = 4$ estis

where $m = 1, 2, 3, 4$ and the greek symbols are numbers. Finally, we insert these combinations of ${C_{34}}^m$ into the 4 Jacobi conditions ${J_{134}}^m$, and solve the linear equations. We thus obtain the numerical values of the 4 constants ${C_{34}}^m$. Then we calculate back the values of ${C_{24}}^m$ using (9), and of ${C_{23}}^m$ using (7).

One sees that the sequence of the algorithm for $n = 4$ was

$$\{{C_{1j}}^m\} \to {J_{123}}^m \to {C_{23}}^m \to {J_{124}}^m \to {C_{24}}^m \to {J_{134}}^m \to {C_{34}}^m \,, \tag{10}$$

kaj la serio de finaj kalkuloj de dependaj konstantoj de strukturo estis

and the sequence of final calculation of dependent structure constants was

$${C_{34}}^m \to {C_{24}}^m \to {C_{23}}^m \,. \tag{11}$$

Se ni metas la 12 numerajn valorojn asignitaj por konstantoj ${C_{1j}}^m$, kaj la 12 numerajn valorojn ricevitajn por la aliaj ${C_{ij}}^m$, en iu ajn el la 4 kondiĉoj de Jacobi ne uzitaj, ${J_{234}}^m$, ni ricevos $0 = 0$.

If we insert the 12 numerical values assigned to constants ${C_{1j}}^m$, and the 12 numerical values obtained for the other ${C_{ij}}^m$, into any of the 4 Jacobi conditions not used, ${J_{234}}^m$, we shall obtain $0 = 0$.

3 Por arbitra n

Kondiĉoj de Jacobi (5) estas kvadrataj en konstantoj de strukturo. Tial, ricevi numerajn valorojn de konstantoj de n-dimensia algebro de Lie, ekde numeraj valoroj de kelkaj konstantoj hazarde elektitaj, estas longtempa verko, ordinare. Tamen, antaŭa sekcio sugestas simplan kaj efikan algoritmon por, poste konvena elekto de preciza nombro de konstantoj, ricevi la ceterajn konstantojn.

En tiu algoritmo, unue ni aranĝas la konstantojn de strukturo ${C_{ab}}^m$ laŭ ordo pligrandiĝanta en la malsupraj indicoj:

3 For arbitrary n

The Jacobi conditions (5) are quadratic in the structure constants. So, obtaining numerical values for constants of a n-dimensional Lie algebra, out from numerical values of some constants randomly chosen, is a time consuming task, generally. However, the preceding section suggests a simple and efficient algorithm for obtaining the remaining constants, after a convenient choice of a precise number of constants.

In that algorithm, we first arrange the structure constants ${C_{ab}}^m$ in increasing order of lower indices:

$$C_{12}{}^m,\, C_{13}{}^m,\, \dots,\, C_{1n}{}^m,\, C_{23}{}^m,\, C_{24}{}^m,\, \dots,\, C_{2n}{}^m, \dots\dots,\, C_{(n-1)n}{}^m\,, \tag{12}$$

kaj simile aranĝas la kondiĉojn de Jacobi $J_{1bc}{}^m$:

and similarly arrange the Jacobi conditions $J_{1bc}{}^m$:

$$J_{123}{}^m,\, J_{124}{}^m,\, \dots,\, J_{12n}{}^m,\, J_{134}{}^m,\, \dots, J_{13n}{}^m,\, \dots\dots,\, J_{1(n-1)n}{}^m. \tag{13}$$

Ekde tie ĉi, la algoritmo procedas kiel en antaŭa sekcio: unue ni faras komputilo asigni hazardajn numerajn valorojn por la $n(n-1)$ konstantoj de strukturo $C_{1b}{}^m$, kaj metas tiujn valorojn en la n ekvacioj de Jacobi $J_{123}{}^m$. Poste ni solvas tiujn linearajn ekvaciojn por la n variabloj $C_{23}{}^m$, kaj tiel pluen.

Do la serio de la algoritmo estas

From here on, the algorithm proceeds as the preceding section: we first make a computer assign random numerical values for the $n(n-1)$ structure constants $C_{1b}{}^m$, and set these values into the n Jacobi equations $J_{123}{}^m$. Then solve these linear equations for n variables $C_{23}{}^m$, and so on.

The sequence of the algorithm then is

$$\begin{gathered}\{C_{1b}{}^m\} \to J_{123}{}^m \to C_{23}{}^m \to J_{124}{}^m \to C_{24}{}^m \to \dots \to J_{12n}{}^m \to C_{2n}{}^m \to J_{134}{}^m \to C_{34}{}^m \to \\ \to J_{135}{}^m \to C_{35}{}^m \to \dots \to J_{13n}{}^m \to C_{3n}{}^m \to \dots\ \dots \to J_{1(n-1)n}{}^m \to C_{(n-1)n}{}^m\,.\end{gathered} \tag{14}$$

Havante la numerajn valorojn de konstantoj $C_{(n-1)n}{}^m$, ni sekve kalkulas la valorojn de ceteraj konstantoj en inversa ordo:

Having the numerical values of the constants $C_{(n-1)n}{}^m$, we sequentially calculate the values of the remaining constants in the reverse order:

$$C_{23}{}^m \leftarrow \dots \leftarrow C_{(n-3)(n-1)}{}^m \leftarrow C_{(n-3)n}{}^m \leftarrow C_{(n-2)(n-1)}{}^m \leftarrow C_{(n-2)n}{}^m \leftarrow C_{(n-1)n}{}^m. \tag{15}$$

Por kontroli, ni metas valorojn de la sendependaj kaj dependaj konstantoj en iu ajn ekvacio de Jacobi $J_{abc}{}^m$ kun $a \neq 1$; ni devas ricevi $0 = 0$.

Tiu ĉi algoritmo evidentigas, ke la maksimuma nombro de sendependaj konstantoj de strukturo de n-dimensia algebro de Lie, kaj la responda nombro de dependaj konstantoj, estas

To check, we introduce the values of the independent and dependent constants into any Jacobi equation $J_{abc}{}^m$ with $a \neq 1$; we should obtain $0 = 0$.

This algorithm makes evident that the maximum number of independent structure constants of a n-dimensional Lie algebra, and the corresponding number of dependent constants, are

$$n(n-1)\,, \quad nC_n{}^2 - n(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\,, \tag{16}$$

respektive. Ankaŭ, la nombro de sendependaj kaj de dependaj kondiĉoj de Jacobi estas, respektive,

respectively. Also, the number of independent Jacobi conditions and that of dependent ones are, respectively,

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\,, \quad nC_n{}^3 - \frac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(n-3)\,. \tag{17}$$

4 Komentoj

La algoritmo prezentita tie ĉi solvas sinsekve, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ foje, sistemojn de n linearaj ekvacioj por n variabloj. Tiu algoritmo multe taŭgas al persona komputilo, eĉ de malgranda kapablo.

Vere, estas maniero matematike pli rekt-metoda por ricevi la konstantojn de strukturo pendantaj de la $n(n-1)$ konstantoj, elektitaj kiel ni faris tie ĉi. Tiu alia maniero profitas, ke ĉiuj $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ ekvacioj ${J_{1bc}}^m$ estas linearaj por ĉiuj $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ konstantoj ${C_{ab}}^r$ kun $a>1$. Do, se la $n(n-1)$ konstantoj ${C_{1b}}^r$ estas donitaj, tiu alia maniero bezonas solvi nur 1 sistemon de $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ linearaj ekvacioj. Malfeliĉe, se n estas granda, tiu elefanta kalkulaĵo ordinare estas pluen la kapablo de disponebla persona komputilo.

4 Comments

The algorithm presented here solves sequentially, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ times, systems of n linear equations for n variables. That algorithm is suitable for a personal computer, even of short power.

As a matter of fact, there is a mathematically simpler way to obtain the structure constants depending on the $n(n-1)$ constants, chosen as we did here. This alternative way profits from all $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ equations ${J_{1bc}}^m$ being linear for all $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ constants ${C_{ab}}^r$ with $a>1$. So, if the $n(n-1)$ constants ${C_{1b}}^r$ are given, this alternative way simply needs solving just 1 system of $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ linear equations. Unfortunately, if n is large, this elephantine calculation is generally beyond the capacity of a personal computer at disposal.

Citaĵoj

[1] J.F. Cornwell, *Group theory in physics*, 2 volumes, Academic Press (1984).