SOLVABILITY OF THE EULER-POISSON EQUATIONS IN EXP *L*(S,E/Q)-FUNCTIONS

D.L. Abrarov

Abstract. The monograph [1] reveals and argues the effect of the exact solvability of the classical Euler-Poisson equations in special *L*-functions. Due to the novelty and unexpectedness of this effect from the classical point of view, the text of the book was forced to contain a lot of different arguments and turned out to be very significant in volume.

Therefore, below, schematically, with a number of additional accents, a general approach, derivation, argumentation and interpretation of the *L*-functional structure of the general solution is given.

The mathematical basis of the exact solvability effect is manifested - the hidden fundamental Galois symmetry of the phase flow of the Euler-Poisson equations, associated with analytic automorphisms of the three-dimensional sphere and algebraically realized by the coadjoint representation of the functional extension of the simple exceptional algebra e_8, defined over the field of fractional-rational functions.

The coordination of this symmetry gives an explicit analytical form of the general solution of the classical Euler-Poisson equations over complex time in the form of *the universal analytic δ-function* - the exponential of zeta-function of the canonical modular Dedekind parabolic form of weight 12, as well as their particular solutions - the exponential of the Hasse-Weil *L*-functions and zeta - functions of elliptic curves over the field $\mathbb{Q}$ (*analytical δ-functional complex*).

In the context of the emerging need to correct both the classical solutions and the existing classification of integrable cases of the Euler-Poisson equations, a connection is made between the general *L*-functional solution and the classical cases of integrability and KAM-theory. This correction has a "hard analytical" δ-shaped functional and essentially quantum character.

The mechanical (and physical) meaning of the exact general solution is the finite hierarchy (complex) of gyroscopes in the central gravitational field, which turns out to be the result of the canonical compactification of classical dynamics with singularities at the fixing points of the tops.

The resulting dual to the original ("body in the field") representation "particle with field" leads to the interpretation of the general solution over complex time as the potential of the gravitational ball-dipole, as well as to the connection of this interpretation with the 3-body problem for ball-masses in a homogeneous gravitational base monopole field. This interpretation is experimentally realized in the context of the orbital dynamics of artificial Earth satellites.

Keywords: *Euler-Poisson equations, exact solvability, self-similarity of the isotropic sphere* $\mathbb{S}^3$, *L-functions of elliptic curves over* $\mathbb{Q}$, *analytic* δ*-functions, algebra* $e_8(\mathbb{Q}(s))$, *gyroscopic self-oscillations of tops, gravity of a ball-monopole and ball-dipole, Dzhanibekov multiorientation effect, quantization*.

1. Введение: необходимость жесткой коррекции аффинной классики

Задача о движении массивных твердых тел (волчков), кодируемая уравнениями Эйлера-Пуассона, наряду с классической ньютоновой задачей трех тел, является фундаментальной проблемой классической механики, имеющей многочисленные технологические приложения гироскопического характера.

В книгах [2], [3] содержатся основные результаты в динамике классического твердого тела и описываются различные подходы к проблеме разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона. В монографии [1] развивается подход, направленный на унификацию и полную классификацию классических решений, включающий синтез общих и частных случаев интегрируемости и необходимость контекстной коррекции КАМ-теории,

Дифференциальные уравнения Эйлера-Пуассона, описывающие динамику трехмерных тяжелых твердых тел (волчков) в плоско-параллельном поле тяжести имеют вид:

$$d\vec{M}/dt = [\vec{M}, \vec{\omega}] + k[\vec{\gamma}, \vec{c}], \tag{1}$$

$$d\vec{\gamma}/dt = [\vec{\gamma}, \vec{\omega}], \tag{2}$$

где соответствующие вектора $\vec{M} = I\vec{\omega}$ – кинетический момент тела, $\vec{\omega}$ – угловая скорость тела, $\vec{c}$ – направляющий вектор прямой от неподвижной точки до центра масс, $\vec{\gamma}$– проекции вертикального орта на оси подвижной системы координат, жестко связанной с телом.

Где также I – диагонализированный тензор инерции тела в его неподвижной точке, $k = mg|r_c|$ – коэффициент, равный произведению веса тела на расстояние от неподвижной точки до центра масс, [,] – операция векторного произведения в трехмерном евклидовом пространстве.

Структура уравнений Эйлера-Пуассона опирается на общепринятую аффинную структуру пространства-времени (т.е., определенную над множествами $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, открытыми относительно классической топологии обычного архимедова нормирования), представляемого в нашем случае расширением классическим аффинным временем конфигурационного пространства этих уравнений (пространства направляющих косинусов волчков).

Поэтому данные гамильтоновы уравнения только *локально* (над *аффинным* вещественным временем, открытым в классической топологии) параметризуют соответствующий им фазовый поток в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma}, \vec{\omega})$ (пространстве «направляющие косинусы – угловые скорости»).

Таким образом, классическое рассмотрение уравнений Эйлера-Пуассона использует «локальную» безразмерную (аффинную) параметризацию исходного заведомо *нелокального* (*размерного*) физического явления – реальной размерной динамики массивных волчков в физическом (реальном) времени.

Это классическое аффинное описание не вполне корректно и с математической точки зрения потому, что *аффинная параметризация* фазовых траекторий уравнений Эйлера-Пуассона *не полностью учитывает их инвариантность относительно отображения инволюции, индуцированного аналитическим отображением зеркальной симметрии над формальным аффинным временем фазового потока данных уравнений.*

Оказывается, эта фундаментальная аналитически инволютивная инвариантность классического гамильтониана уравнений (1) – (2) *влечет компактность каждой фазовой траектории уравнений Эйлера-Пуассона*, противоречащую ее классической аффинной параметризуемости.

Действительно, орбитами этой аналитической инволюции являются орбиты аналитической фазовой монодромии сопровождающих волчки правильных тетраэдров с центрами в точках закрепления (т. е., движение волчка находится во взаимнооднозначном соответствии с жестко связанным с ним таким тетраэдром). Данные орбиты имеют индуцированную инволюцией обратимости периодическую тензорнозначную структуру на монодромных образах тетраэдра и, следовательно, являются компактными относительно классической аффинной топологии.

Контролирующим механическим смыслом этой компактности оказывается итоговый нетривиальный *компактный автоколебательный характер динамики с конечным числом степеней свободы*, определяемый уравнениями (1) – (2).

Данная динамика имеет «минимальную маятниковую модель»: это *аналитические колебания классического математического маятника около его вертикального равновесия* (*это его классическое, нижнее, равновесие «по модулю зеркальной инволюции» обратимости по времени*).

В рамках физической терминологии такой маятник – канонический *изотропный математический маятник*, представляющий динамику классического (однородного) маятника относительно изотропного расширения систем отсчета для описания его движения. В математической терминологии – это канонический мероморфный маятник: метрика на его области определения имеет вид канонических конечных аделей на поле дробно-рациональных функций. Уравнения его движения эквивалентны уравнениям Ковалевской для найденного ею случая.

Факт компактности фазовых траекторий связан с пропускаемой классикой, но кажущейся достаточно прозрачной, нормировкой вращающихся твердых тел «аналитической монодромией сопровождающего тетраэдра» в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ уравнений (1) – (2).

Классика пропускает индуцированное действие зеркальной инволюции на сопровождающих волчки тетраэдрах – монодромию универсального сопровождающего тетраэдра (*это его аналитическое 2-листное накрытие самого себя*), *что далее индуцирует исключение из области определения исходных уравнений* (1) – (2) *физически присутствующих объектов*:

- *точек закрепления волчков – центров сопровождающих их тетраэдров*;
- *прямых, содержащих вектора угловой скорости и, соответственно, кинетического момента сопровождающих тетраэдров, так как эти прямые с необходимостью содержат точку закрепления*.

Таким образом, пропуск «всего одной точки» области определения индуцирует физическую потерю «твердотельности» волчков (потерю «фазовой жесткости» фазового потока), исходные уравнения теряют базовый механический смысл и, соответственно, возникает необходимость математической коррекции классических конструкций и выводов.

Более того, важно подчеркнуть, что *некомпактность в классике доминирует*: например, для классических интегрируемых случаев (в смысле Лиувилля-Арнольда) *множество некомпактных «квазипериодических фазовых траекторий» имеет полную меру* в классическом фазовом пространстве с классической архимедовой метрикой.

Вместе с тем, *фазовые траектории уравнений* (1) – (2), *в итоге, канонически компактны:* они изоморфны эллиптическим кривым с рациональными коэффициентами (компактным абелевым многообразиям рода 1), графики которых как раз и представляются орбитами сопровождающих тетраэдров. *Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона – каноническая групповая фактор-гомотетия* $3d$*-сферы, имеющая структуру автодуальности потока больших кругов на ней.*

Поэтому становятся понятными как невозможность из классики увидеть «точную разрешимость», так и сформированное устойчивое мнение «о неразрешимости» рассматриваемых уравнений, аргументированное в рамках КАМ-теории.

В этом контексте восстановления корректной структуры фазового пространства *идея* предлагаемого подхода к непосредственному решению уравнений Эйлера-Пуассона (в самом обычном смысле нахождения их общего решения) *состоит именно в использовании такой «эквивариантной зеркальной» компактификации* их классического (аффинного) фазового пространства, приводящей к «фазовой жесткости» (*эквивариантность* означает согласованность с фазовым потоком исходных уравнений).

И именно *такая фазовая жесткость* («эквивариантная гироскопичность») позволяет свести задачу к случаю одной (глобально аналитической) степени свободы и, тем самым, проинтегрировать исходные сильно нелинейные уравнения.

Контролирующим *динамическим образом для фазовой линеаризации* уравнений (1) – (2) служит *эквивариантное двулистное (функциональное)* накрытие канонической диагонали фазового пространства этих уравнений самой себя посредством инволюции обратимости. Данная диагональ в аффинном представлении является сепаратрисой в фазовом пространстве волчка Эйлера.

Инволюция обратимости по времени уравнений (1) – (2) *аналитически функционально и алгебраически жестко (конечнопорожденно и Галуа-разрешимо) компактифицирует аффинную билинейную двояко-асимптотическую динамику на ней, представляя канонический функциональный прямолинейный поток на* $3d$*-бутылке Клейна (функциональном многообразии)* – отображении канонической аффинно односвязной аналитической параметризации группы $SO(3)$.

Для весьма контрастного сравнения с классикой отметим, что *одна из аффинных проекций* этой функциональной конструкции – *классический хаотизирующий эффект* расщепления сепаратрисы динамики волчка Эйлера.

Такая эквивариантная функциональная зеркальная компактификация двояко-асимптотической («*канонически предкомпактной*») *динамики оказывается эквивалентной канонической линеаризации уравнений Эйлера-Пуассона на базе полностью симметризованного классического аффинного пространства-времени,* т. е. этого пространства, симметризованного по всем аффинным пространственным координатам и аффинному времени.

Соответствующие замены исходных аффинных переменных уравнений (1) – (2) (ими оказываются замены Ковалевской в ее случае интегрируемости) сводят рассматриваемые уравнения к системе с одной («эквивариантной маятниковой», «глобально аналитической») степенью свободы, и они автоматически интегрируются. При этом важно, что *процедура симметризации является эквивариантной* – она не нарушает изначальной структуры этих уравнений.

Подчеркнем, что *областью определения такой симметризации* исходных аффинных переменных уравнений Эйлера-Пуассона *является отображение их симметрии по формальному аффинному времени.*

Заметим, что эта эквивариантная зеркальная симметрия (вслед за указанной выше *потраекторной компактификацией*) также индуцирует как компактификацию собственно исходного классического *аффинного времени* $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), так и (парадоксально выглядящую для классики) компактификацию всего фазового пространства, имеющую корни уже в скрытой квантовой природе исходных классических уравнений (см. п.18).

И здесь важно отметить, что *топология эквивариантно компактифицированного классического аффинного времени нетривиальна* – она оказывается индуцированной специальной (эквивариантной) *функциональной адельной нормой на поле дробно-рациональных функций.*

В итоге, обнаруживаемая естественная функциональная Галуа-структура зеркальной симметрии обратимости по времени исходных сильно нелинейных уравнений, приводит к их полной линеаризации и канонической интегрируемости в специальных L-функциях.

Гипотеза, подчеркивающая роль зеркальной симметрии обратимости по времени, состоит в том, что динамика изотропного маятника (и соответственно, уравнений (1) – (2)), описывается сильно нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка – так называемым уравнением PVI (см. [4]). При этом, переменные $x,\ t, x-t$ уравнения PVI являются каноническими аффинными координатами на упорядоченных классических зеркально-симметричных двояко-асимптотических траекториях и их двойственности, а само уравнение PVI – каноническая локальная координатизация этой упорядоченной зеркальной симметрии. Фазовый поток изотропного маятника гипотетически реализуется изоморфными потоками $4d$-сферического маятника и $4d$-гармонического осциллятора (предложен Е. А. Митюшовым).

Классический КАМ-хаос для уравнений Эйлера-Пуассона в рамках такой *коррекции, восстанавливающей эквивариантность классической аффинной фазовой динамики,* формально приобретает *виртуальную роль* – роль пространства *неканонических аффинных карт* на каноническом эквивариантном глобальном функциональном атласе отображения фазового потока рассматриваемых уравнений (моделируемого *аффинно односвязными* аналитическими автоморфизмами трехмерной сферы).

Если встать на конструктивную точку зрения, то эта роль аналогична *промежуточной конструктивной роли* пространства пробных функций Л. Шварца для получения δ-функций.

Аналогия «Функциональный анализ – эквивариантная КАМ-теория» имеет вид:

$$\{\text{пробные шварцевы функции}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{потенциалы (возмущенные гамильтонианы)}\\ \text{аффинных КАМ} - \text{деформаций прямолинейных обмоток}\\ \text{торов слоения Лиувилля} - \text{Арнольда}\end{matrix}\right\};$$

$$\{\boldsymbol{\delta} - \text{функции}\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{exp\,L(s,E/\mathbb{Q})} - \text{функции } \Leftrightarrow \text{ результат аналитического продолжения}\\ \text{функций } L(s,E/\mathbb{Q}) \text{ как эквивариантных пробных функций,}\\ \text{имеющий смысл эквивариантного усреднения "КАМ} - \text{деформаций" } \Leftrightarrow\\ \text{аналитические } \boldsymbol{\delta} - \text{функции } \Leftrightarrow \text{ сами вращающиеся волчки}\end{matrix}\right\}.$$

Наконец, следует отметить, что конструктивная алгебраическая модель точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем состоит в *их интегрируемости на коприсоединенном представлении функциональной коррекции «максимальной» исключительной алгебры* $e_8(\mathbb{C})$ – *функциональной алгебре* $e_8(\mathbb{Q}(s))$ (*аналитически* – аффинно односвязной мероморфной коррекции, *геометрически – изотропной коррекции* $e_8(\mathbb{C})$). Алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$ представляет канонические координаты на канонической изотропной коррекции $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ – каноническую координатизацию глобальной (с однокартным атласом) сфере $\mathbb{S}^3$.

Данная каноническая функциональная алгебраическая и геометрическая модель влечет необходимость соответствующей *функциональной и проективной* коррекции конечномерной симплектической классики *функциональным* отображением зеркальной инволюции.

2. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона: математический, физический и механический аспект

На классические уравнения (1) – (2) можно смотреть как на дифференциальные уравнения, определяющие *новый класс специальных обобщенных функций,* представляющих их общее решение ([1]). В целом, его можно охарактеризовать как *класс аналитических δ-функций, представляющих универсальную обобщенную аналитическую δ-функцию* $exp\,\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ *в виде комплекса*. Использование термина «*аналитическая»* (δ-функция) *обусловлен аффинно аналитическим классом гладкости (а не* C^∞*) пробных шварцевых функций,* *ее формирующих*.

Роль таких *эквивариантных пробных функций* играют *функции Хассе-Вейля* $L(s|t,E/\mathbb{Q})$, *организованные в комплексы и имеющие функцию* $\zeta\big(s,\Delta_{12}(q)\big)$ *в качестве «универсального потенциала комплекса эквивариантных пробных шварцевых функций». Можно считать, что роль нулевого значения эквивариантных пробных функций в* $s|t=\infty$ *играют их вычеты в* $s|t=1$ – *граничные условия канонического фактор-группового самоподобия* $3d$*-сферы* (Sp_{3d}-модель в [1]).

Аналитическая структура вычетов $Res_{s=1}L(s|t,E/\mathbb{Q})$ крайне нетривиальна и, как известно, регулируется известной гипотезой Берча-Свиннертона-Дайера.

В монографии [1] приведены подробные доказательства следующих утверждений, а единая схема их доказательств приведена в пп. 5–7.

Теорема 1. Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона, описывающее аналитическую динамику вектора кинетического момента $\vec{M}$ волчков, представляет каноническую координатизацию канонической аффинно односвязной экспоненты $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$, геометрически реализуемую эквивариантным функциональным расслоением Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$:

$$\vec{M}(s|t) = exp\,\zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big) = exp\,\mathbb{S}^3\,(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \{\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \xrightarrow{exp\,\mathbb{S}^1_{big}(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \mathbb{S}^2(\mathbb{C}|\mathbb{R})\},$$

где

- $\zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big)$ – дзета-функция канонической (единственной) параболической формы веса 12 (ее определение см. в п.6);
- $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ – обозначение представления поля $\mathbb{C}$ комплексом относительно естественного вложения $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$;
- $s|t$ – канонический аффинный координатный комплекс на числовом комплексе $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- $exp\,\zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big) = exp\,\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – корректное определенное равенство в силу скрытой <u>эквивариантной</u> $3d$-векторнозначной структуры функции $\zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big)$ – групповой <u>$3d$-значной</u> структуры на ее нулях (см. теорему 2).

Теорема 2. Общее решение, с учетом эквивариантных начальных условий, имеет следующий структурно-аналитический вид, координатизирующий:

- общий аналитический поворот $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ вокруг ее центра в $4d$-пространстве $\mathbb{E}^4$ в аффинных координатах $s|t$ на прямой $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ (формальном времени) – локальных координатах на ее больших кругах;
- эквивариантное расслоение Хопфа $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ как групповой авторекурсивный комплекс:

$$\vec{M}(s|t, s_0|t_0) = exp\,(\zeta(s|t, \Delta_{12}(q))(\zeta(s|t, \Delta_{12}(q)) = 0)_{nontriv}\,(mod\,3))),$$

где

$$\{\mathbb{S}^3[exp\,(\zeta_{eq}(s|t)] \xrightarrow{exp(\mathbb{S}^1_{big}|\mathbb{S}^0_{big})[\zeta_{eq}(s|t)=const]} \mathbb{S}^2_{big}[(\zeta_{eq}(s|t) = 0)_{nontriv}]\}.$$

$\zeta_{eq}(s|t) = \zeta(s|t, \Delta_{12}(q))$ – обозначение свойства эквивариантности данной дзета-функции.

$(\zeta(s|t, \Delta_{12}(q) = 0)_{nontriv}\,(mod\,3)$ – нетривиальные нули функции $\zeta(s|t, \Delta_{12}(q))$, являющиеся:

- рекурсивно упорядоченными по $mod\,3$ (начиная с 1-го нетривиального нуля); отметим, что данное упорядочение индуцировано групповым законом на универсальной кривой $E/\mathbb{Q}$ ([1]) и имеет фактор-структуру *групповой <u>авто</u>рекурсии*;
- $3d$-векторнозначными периодами отображения $s|t \to \vec{M}(s|t)$;
- генерирующими точками $\mathbb{S}^0_{big} \cong generator\,\mathbb{S}^1_{big}$ большого круга $\mathbb{S}^1_{big}$ на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$;
- каноническими начальными условиями *общего непрерывного* поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона имеет следующие геометрические интерпретации:

- потенциал аффинно односвязного аналитического расслоения Хопфа $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (расслоения Хопфа «стандартной функциональной сферы $\mathbb{S}^3$»);
- потенциал *общего* (*универсального*) *аналитического* качения стандартного геометрического $3d$-шара по евклидову $3d$-пространству (условие *«общей аналитичности»* индуцирует условия жесткой «специальной ($\vec{\gamma} - \vec{\omega}$)-периодичности» такого «общего» качения);
- потенциал *общего аналитического* поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (вложенной в $4d$-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}^4_O$ с фиксированным центром O) вокруг центра O (условие *«общей аналитичности»* индуцирует жесткую специальность параметров «общего» поворота).

Теорема 3. Частные решения уравнений Эйлера-Пуассона представляют подкомплексы общего решения, рассмотренного как функциональный CW-комплекс:

$$(\vec{M}(s|t,s_0|t_0))_{CW} = exp\, L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q}))(L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q}) = 0)_{nontriv}\ (mod\ 3)),$$

где

- $(\vec{M}(s|t,s_0|t_0))_{CW}$ – корректно определенный функциональный CW-комплекс;
- $E/\mathbb{Q}$ – эллиптические кривые с рациональными коэффициентами;
- $\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$ – дзета-функции кривых $E/\mathbb{Q}$;
- $L(s|t,E/\mathbb{Q})$ – L-функции Хассе-Вейля кривых $E/\mathbb{Q}$;
- $L|\zeta$ – обозначение комплекса отображений, корректно определенного в силу точности (наличия нулевого ядра) отображений вложений $\zeta(s|t,E/\mathbb{Q}) \to L(s|t,E/\mathbb{Q})$ (детали см. в [1]).

Теперь для демонстрации целостности эффекта точной разрешимости уравнений анонсируем утверждения, по сути подготовленные в [1] к приводимым ниже формулировкам.

Теорема 4. Уравнения Эйлера-Пуассона над аффинным временем $\mathbb{C}$ интегрируются на коприсоединенном представлении *мероморфного расширения* $e_8(\mathbb{Q}(s))$ простой исключительной алгебры Ли $e_8(\mathbb{C})$, *определяющие условия* для которого описаны в п. 10. (см. также [1], с.459).

Теорема 5. Частные решения уравнений Эйлера-Пуассона над временем $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ представляют иерархию (конечное упорядоченное множество) пространства циклов потенциала универсального (общего) аналитического поворота $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, реализующего эквивариантное аналитическое (глобальное, однокартное) продолжение ее локальных вращений в евклидовом $4d$-пространстве $\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Данный глобальный поворот канонически реализуется, индуцируя полную линеаризацию уравнений Эйлера-Пуассона в «эквивариантном $4d$-мерном» евклидовом пространстве:

- $\mathbb{E}^{20}(\mathbb{R})$ для $s|t \in \mathbb{R}$ и имеется изоморфизм полной линеаризации фазового потока уравнений (1) – (2) (см. [1] с.242) над $\mathbb{R}$-временем:
$$\vec{M}(t) \cong exp\,\mathbb{S}^3(\mathbb{R}) \cong SO(20,\mathbb{R})$$
- $\mathbb{E}^{281}(\mathbb{R})$ для $s|t \in \mathbb{C}$ и имеется изоморфизм полной линеаризации фазового потока уравнений (1) – (2) над $\mathbb{C}$-временем:
$$\vec{M}(s) \cong exp\,\mathbb{S}^3(\mathbb{C}) \cong SO(281,\mathbb{R}).$$

Теорема 6 (Физический аспект). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона представляет канонические координаты на *аналитически релятивистском* ($[c,c]$-инвариантном) геометрическом $3d$-шаре, т.е., инвариантном относительно $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-аналитических систем отсчета – орбите отображения общей монодромии свободного вектора скорости света c в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Теорема 7 (Механический аспект). Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-временем имеет следующие механические интерпретации ([1]):

- тяжелый однородный $3d$-шар, *аналитически* стоящий на неподвижной точке в плоско-параллельном поле гравитации («он вертикально удваивается» над формальным $\mathbb{C}$-временем);
- шаровой гравитационный монополь (над $\mathbb{R}$-временем), шаровой гравитационный диполь (над $\mathbb{C}$-временем); где
шаровой гравитационный монополь: *производный* (п. 13) *массивный однородный* $3d$-шар с центром в свободной точке трехмерного физического пространства и с однородным полем гравитации (он обязан аналитически вращаться вокруг флага «центр - ось - плоскость»);
- инерциальная динамика ротора в трехмерном физическом пространстве в полностью стабилизированном кардановом подвесе (соответствующее определение см. в [5]);
- модельный потенциал для гравитационного шарового диполя|монополя (см. п.13).

Качественные основы эффекта точной разрешимости

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона может быть рассмотрен как каноническая функциональная аналитическая групповая связность на группе $SO(3)$ с механически естественным условием тривиальности ее фундаментальной группы. Это условие выделяет данные уравнения из их многомерных обобщений и является условием *фазовой односвязности*, а также, как отмечалось в п. 1, условием *аффинной (конфигурационной) односвязности* (односвязности над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$).

Классическое представление группы $SO(3)$ двулистным накрытием стандартной $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (т.е., $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ вложенной в $4d$-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}_O^4$ с фиксированным центром O), индуцирует изоморфную реализацию указанной эквивариантной аналитической связности на $SO(3)$ в виде канонической односвязной функциональной аналитической групповой структуры G на пространстве $\mathbb{E}_O^4$.

Индуцированная таким образом аналитическая связность на пространстве $\mathbb{E}_O^4$ оказывается *плоской эквивариантной функциональной аналитической связностью (структурой)*, обозначаемой далее G.

Аналитическая групповая структура G скрытым образом проявляется в инволюции зеркальной симметрии обратимости $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ исходных уравнений (1) – (2) как по формальному комплексному времени $\mathbb{C}$, так и формальному вещественному времени $\mathbb{R}$.

Отметим, что всюду далее рассматривается аффинное время $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ (формальное, классическое время). Все далее рассматриваемые структуры (пространства, отображения) предполагаются определенными над этим временем, если это не оговаривается отдельно.

Каноническое аффинное (локальное) представление структуры G реализуется уравнениями Ковалевской (хотя казалось бы, что это специализация уравнений (1) – (2) для ее частного случая).

В контексте связи с физикой отметим, что фундаментальная функциональная групповая структура G также является индуцированным каноническим $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантным двулистным накрытием с односвязным образом классического $(3d+1)$-пространства-времени Минковского с фиксированным центром. Это пространство можно интерпретировать как $3d$-аналог классической прямолинейной обмотки $2d$-тора Лиувилля-Арнольда.

Механический смысл аналитической связности G в контексте исходного дифференциального уравнения очень естественен – это атрибут корректной краевой задачи для уравнений Эйлера-Пуассона:

1) фазовый поток динамических уравнений (1) Эйлера изоморфен отображению общего <u>*аналитического*</u> качения стандартного геометрического $3d$-шара Ш^3 *по пространству* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – фазовый поток динамических уравнений Эйлера (1) в обратимом времени $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ с гамильтонианом:

$$|(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

   где i, j – независимые мнимые единицы.
   Данное отображение, описывает <u>*общую инерциальную динамику*</u> качения массивного однородного $3d$-шара по свободной прямой в пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, ортогональной классическому плоско-параллельному полю гравитации.

2) фазовый поток кинематических уравнений (2) – граничное условие фазового потока уравнений (1) и изоморфен отображению <u>*непрерывного*</u> качения шара Ш^3 *по пространству* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – фазовый поток уравнений Пуассона (2) в обратимом времени $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ с гамильтонианом:

$$exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2),$$

представляющий <u>*общую равновесную (безразличную) динамику*</u> качения массивного однородного $3d$-шара по пространству $\mathbb{E}^3$ (его адиабатическую динамику, эквивариантную статику).

Данная динамическая система <u>*является аналитической гамильтоновой системой с одной глобальной степенью свободы – обратимым временем* $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$</u> (с эквивариантной мероморфной адельной топологией, см. [1]) и интегрируется в указанных выше функциях.

Число *аффинных степеней свободы* этой системы (над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$-временем) равно рангам (над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$) эквивариантной функциональной алгебры Ли – генератора групповой аналитической структуры G:

- **20** – над $\mathbb{R}$-временем;
- **281** – над $\mathbb{C}$-временем

представляющих ранги отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}$ в пространстве $\mathbb{E}_O^4$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, соответственно. Отметим, что число было обнаружено в теоретической физике (см. пп. 11, 19).

В итоге, числа 20, 281 – это ранги функциональных алгебр $g_2(\mathbb{Q}(s))$ и $e_8(\mathbb{Q}(s))$, изоморфных каноническим генераторам фазовых потоков непрерывного качения в пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$:

- массивного однородного $3d$-шара *по прямой* $\mathbb{R}|\mathbb{C}$*, ортогональной линиям классического плоско-параллельного поля*;
- геометрического (безмассового) шара Ш^3 *по свободной в* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ *прямой* $\mathbb{R}|\mathbb{C}$.

Соответствие глобальной динамической модели уравнений (1) – (2) с классикой таково:

Классические интегрируемые случаи – канонические аффинные карты на классах эквивалентности указанных геометро-динамических моделей; в частности, тривиальный волчок – каноническая аффинная карта на непрерывном качении шара Ш^3 *по пространству* $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

В «твердотельном» контексте уравнений Эйлера-Пуассона групповая структура G реализуется канонической экспоненциальной (жесткой) аналитической симметрией:

- канонической 4d-тригонометрией;
- корректно определенной канонической экспонентой исходного классического фазового *аффинного* пространства $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma},\vec{\omega})$ после его перенормировки на скрытую от классического рассмотрения групповую фазовую диагональ, обладающую фундаментальной релятивистской и квантовой структурой;
- отображением канонического разделения переменных исходных уравнений (1) – (2);
- производным отображением модулярной параметризации кривых $E/\mathbb{Q}$.

Фундаментальной моделью данной экспоненциальной аналитической симметрии является *отображение общего вращения вращение сферы* $\mathbb{S}^3$*, локального в объемлющем* $4d$*-пространстве* $\mathbb{E}_O^4$ с фиксированным центром O. Данное вращение *некомпактно* относительно стандартной *архимедовой топологии* в $\mathbb{E}_O^4$ и, вместе с тем, *компактно* относительно «топологии общего многомерного вращения», в итоге, имеющей структуру *специальной адельной топологии* ([1]).

Другими словами, пространство $\mathbb{E}_O^4$ обладает скрытой внутренней *авто*компактифицирующей (в итоге, эквивариантно компактифицирующей) функциональной Галуа-структурой групповой изометрии, являющейся общим нелокальным евклидова пространства $\mathbb{E}_O^4$. Эта структура:

- изоморфна корректно определенному генератору функциональной симметрии G;
- является непрерывным сюръективным отображением $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{E}_O^4$ (внутренним автоморфизмом пространства $\mathbb{E}_O^4$), представляющим зеркальную симметрию обратимости по времени уравнений Эйлера-Пуассона как эквивариантное отображение Пеано *ориентированного* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$*-нуля* в конфигурационное четырехмерие.

В этом контексте *размерность* «4» *является уникальной*: только для нее допустима полная симметризация классических (аффинных) пространственных координат и времени посредством отображения зеркальной симметрии обратимости по времени, которая, вероятно, и есть модель собственно физического времени.

Аналитическая $\mathbb{S}^3$-связность G, имеющая *общее аналитическое вращение сферы* $\mathbb{S}^3$ *(локально в* $4d$*-пространстве* $\mathbb{E}_O^4$) как *одну из геометрических реализаций*, оказывается математически и физически структурно нетривиальной:

- она в качестве своей области определения (скрытым образом) содержит поле дробно-рациональных функций (как каноническую функциональную Галуа – автодуальную/самодвойственную решетку);
- она реализуется каноническим *фазово-твердотельным* (монодромным «конфигурационно-импульсным») вращением стандартного $3d$-шара – его вращением, инвариантным относительно множества аналитических систем отсчета в $3d$-пространстве $\mathbb{E}^3$ (эквивалентным «трехшаровой интерпретации», см. ниже);
- представляет каноническую гомотетию пространства $\mathbb{E}_O^4$ с канонической эквивариантной групповой Галуа-инвариантной фактор-структурой (производным коммутантом ($[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$, $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$).

Уравнения Эйлера-Пуассона реализуют локальное (аффинное), но *не*каноническое представление этой $4d$-евклидовой экспоненты G, а уравнения Ковалевской – уже каноническое (канонически нормализованное) локальное (аффинное) представление.

Но оба эти фундаментальные уравнения не идентифицируются классическим рассмотрением как структурно экспоненциальные, что и является идейным ключом для их точной разрешимости.

Вместе с тем экспоненциальная структура G оказывается нетривиальной:

- с одной стороны, она кажется совсем несложной, имея, по сути тривиальную, неинформативную реализацию отображения обычного параллельного переноса в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4$ (отображения, обозначаемого $Transl(\mathbb{E}_O^4)$);
- а с другой – имеет скрытую нетривиальную функционально-арифметическую фактор-симметрию Галуа, *автоматически* градуирующую и фильтрующую евклидово (конфигурационное) пространство $\mathbb{E}_O^4$ (благодаря «Галуа-размерности», равной 4-м);
- данная фактор-структура геометрически соответствует канонической связности в слоении коразмерности 1 (эквивариантном фробениусовом слоении, см. [4]) на отображении канонической двойственности $\mathbb{E}_{O,*}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}$ с универсальным коммутатором векторных полей на его слоях в виде группового коммутанта $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$);
- представляет канонический прямолинейный поток на трехмерной бутылке Клейна, обозначаемой Kl^3; неориентируемое многообразие Kl^3может быть определено как:
    - каноническое собственное сечение канонической двойственности $4d$-решеток $\mathbb{E}_{O,*}^4/\mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}/\mathbb{Z}^4$,
    - каноническое гиперплоское сечение в пространстве $\mathbb{E}_O^4$, оснащенным канонической непрерывной структурой (и обозначаемым $\mathbb{E}_{O,C^0}^4$).

Аналитическое отображение $Transl(\mathbb{E}_O^4)$ параллельного переноса в $4d$-пространстве $\mathbb{E}_O^4$ имеет каноническую фактор-групповую Галуа-структуру и оказывается фундаментальной функционально-арифметической нетеровой симметрией исходных уравнений – эквивариантной квантовой нетеровой симметрией (см. также п. 19).

Геометрической реализацией этой нетеровой симметрии также является геометро-динамическая трехшаровая интерпретация (см. п. 10).

Непосредственные вычисления показывают, что:

- функция $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$ представляет универсальный потенциал:
    - корректно определенного дифференциала отображения $Transl(\mathbb{E}_O^4)$,

  - универсальной односвязной функциональной *фазовой* нетеровой симметрии в $4d$-пространстве $\mathbb{E}_O^4$;

- функции $L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$ представляют:
  - нетривиальные циклы генератора (дифференциала) отображения $Transl(\mathbb{E}_O^4)$,
  - односвязные функциональные нетеровы *фазовые* потенциалы;

- функция $exp\ \zeta(s,\Delta_{12}(q))$ представляет универсальный потенциал:
  - корректно определенного отображения $Transl(\mathbb{E}_O^4)$,
  - универсальной односвязной производной функциональной нетеровой симметрии в функциональном пространстве $\mathbb{E}_{O,C^0}^4$;

- $exp\ L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$ – функции представляют:
  - нетривиальные циклы отображения $Transl(\mathbb{E}_O^4)$,
  - односвязные производные функциональные нетеровы *фазовые* потенциалы.

Собственно, само евклидово $4d$-пространство $\mathbb{E}_O^4$ с аффинной картой $\mathbb{E}^4(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,s|t)$ является областью определения (конфигурационным пространством) уравнений Эйлера-Пуассона и играет фундаментальную роль в механическом и физическом смысле, представляя базовую нормировочную структуру в его фазовом пространстве:

- абсолютную аффинную систему отсчета для описания фазово односвязной (глобально односвязной) аналитической динамики;
- конфигурационное пространство адиабатической динамики в C^0-пространстве $\mathbb{E}_{O,C^0}^4$;
- конфигурационное пространство вертикального равновесия классического математического маятника как аффинную орбиту отображения канонической глобально односвязной двойственности его нижнего и верхнего равновесий.

Возникающая корректировка (перенормировка) «на абсолютную фазовую $\mathbb{E}_{O,C^0}^4$-систему отсчета – *аффинное вертикальное равновесие математического маятника*» сводится к эквивариантному аналитическому продолжению классических «*пред*эквивариантных» («*пред*экспоненциальных», «*пред*гироскопических») аффинных структур динамики на слоениях Лиувилля-Арнольда (прямолинейных потоков на лиувиллевых торах), ассоциированных с уравнениями (1) – (2), в их формальные особенности $s=0,1,\infty$ в формальном времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$.

Важно отметить, что данные особенности динамически и физически осмыслены: они являются особенностями двояко-асимптотических движений уравнений (1) – (2). Они также индуцированы единственной физической (эквивариантной) особенностью этих уравнений – точкой закрепления универсального волчка, эквивалентно и эквивариантно координатизируемой каноническими особенностями $s=0,1,\infty$ формального времени уравнений (1) – (2).

Образом этого отображения корректировки является каноническая глобальная (однокартная) односвязная аналитическая структура на группе $SO(3,\mathbb{C}|\mathbb{R})$, координатизируемая экспонентой $exp\ \zeta(s,\Delta_{12}(q))$ функции $\zeta(s,\Delta_{12}(q))$.

Механическим смыслом этой аналитической структуры является нетривиальная глобальная $\mathbb{Z}_2$-градуированная (автоколебательная вращательно-колебательная) *гироскопическая* динамика волчков ($\mathbb{Z}_2$-*граду-ированных гироскопов – супергироскопов)*, имеющая:

- экспериментальные визуализации: обычный и обобщенный орбитальный эффект Джанибекова, см. ссылку на недавний пример сложной кувырковой динамики МКС, визуализированной NASA: https://zen.yandex.ru/media/scikit/mlm-nauka-kak-pokazatel-problem-v-rossiiskoi-kosmicheskoi-otrasli-6107c4e5906df03da9685bda?&,
- а также неклассический – релятивистский и квантовый характер.

3. Глобальная геометрия и динамика эффекта точной разрешимости

В инвариантной форме уравнения Эйлера-Пуассона можно представить в виде дифференциала отображения их зеркальной симметрии обратимости по времени $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$, рассмотренного как эквивариантное аналитическое функциональное двулистное накрытие группы $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$, являющейся классическим конфигурационным пространством этих уравнений:

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d(SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)).$$

Общая схема получения явной аналитической формы общего решения данных уравнений состоит в приведении их фазового потока к экспоненциальной форме – *эквивариантной нормальной* (*канонической*) *групповой форме потока больших кругов на трехмерной сфере* $\mathbb{S}^3$ (которая, собственно, и является орбитой симметрии $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ классического гамильтониана уравнений Эйлера-Пуассона).

Другими словами, можно сказать, что геометрическая суть разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона состоит в Галуа-разрешимости канонического самоподобия их симметризованного конфигурационного $4d$-пространства $\mathbb{E}^4_O$, «ограниченного на бесконечности $3d$-сферой $\mathbb{S}^3$».

В эквивалентной инвариантной форме уравнения Эйлера-Пуассона можно представить в эквивалентных формах следующим образом:

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d([\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3]),$$

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{M}(s|t) = d([Z_O^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}]) = d([Transl(\mathbb{E}^4_O), Transl(\mathbb{E}^4_O)]),$$

где $[\,,]$ – стандартное векторное произведение в пространстве $\mathbb{E}^4_O$,

$Z_O^{\mathbb{E}^4} \cong Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}(Sym, Transl, Rot)$ – отображение центральной симметрии в $4d$-пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ и соответственно:

- Sym – зеркальная симметрия в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, относительно его центра O;
- Rot – поворот на угол π в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, относительно его центра O;
- $Transl$ – параллельный перенос в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

При этом отображение параллельного переноса $Transl$:

- является групповым отображением изоморфизма:
  $$Transl \cong Transl(\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})) \cong \{Sym \cong Rot\};$$
- корректно определенным только в $4d$-мерии $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ в силу Галуа-разрешимой структуры его генератора;
- *обладает* $\mathbb{Z}_3$*-градуированной групповой структурой* – относительной *аддитивной* $((\mathbb{C}|\mathbb{R})/Sym)$, относительной *мультипликативной* $((\mathbb{C}|\mathbb{R})/Rot)$, относительной *диагональной* $((\mathbb{C}|\mathbb{R})/(Sym \cong Rot))$.

4. Глобальная линеаризация фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона, в итоге, является канонической аналитической структурой (связностью) на группе $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$ и генерируется фазовым потоком уравнений Пуассона, являющимся канонической непрерывной связностью на группе $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$, имея вид:

$$\frac{d}{d(s|t)}\vec{\gamma}(s|t) = [\vec{\gamma}(s|t), \vec{\omega}(s|t)].$$

Фазовый поток $g_P^{s|t}$ уравнений Пуассона представляет канонический прямолинейный поток в функциональном пространстве $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – канонической операционной нормальной форме евклидова пространства $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}^4_{O[\frac{i}{2}],C^0} \cong \mathbb{E}^2 \otimes_{\frac{i}{2}(s|t)} \mathbb{E}^2,$$

где

- $\frac{i}{2}$ – центр пространства $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ *с канонической непрерывной структурой*

и где операция $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$:

- каноническое собственное сечение канонического изоморфизма $\mathbb{E}^2 \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{E}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2$;
- каноническая непрерывная связность в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона удовлетворяет простейшему линейному (но функциональному) дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_{\mathbb{E}^4_{O,C^0}} = x_{\mathbb{E}^4_{O,C^0}},$$

эквивалентному (в контексте эквивариантного аналога формулы Стокса) линейному дифференциальному уравнению на функциональной группе $SO_{C^0}(3)$ (группе $SO(3)$ с канонической непрерывной структурой, индуцированной с $\mathbb{E}^4_{O,C^0}$)

$$\dot{x}_{SO_{C^0}(3)} = x_{SO_{C^0}(3)},$$

где дифференцирование, обозначенное точкой:

- согласовано с операцией $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$, т. е. каноническая непрерывная структура на пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ является инвариантной относительно этого дифференцирования;
- является каноническим дифференциалом отображения (операции) $\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}$;
- представляет каноническое отображение локального (аффинного):
  - качения $4d$-шара по пространству $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - вращения $4d$-шара в пространстве $\mathbb{E}^4_O(\mathbb{C}|\mathbb{R})$.

Фазовый поток кинематических уравнений Пуассона (обозначаемый $g_P^{s|t}$) представляет *каноническую триангуляцию отображения центральной симметрии* $Z_O^{\mathbb{E}^4}$, производимую *эквивариантной непрерывной* («кинематической») Галуа-симметрией – коммутантом группы Галуа $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$:

$$g_P^{s|t} \cong Image([Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)] \xrightarrow{\rho} \{PGL(\mathbb{E}^4_{O,*}/\mathbb{Z}^4 \cong \mathbb{E}_O^{4,*}/\mathbb{Z}^4)) \cong \{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}\},$$

и

$$\{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\} \cong SO_{C^0}(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R})) \cong g_P^{s|t},$$

где

- $\mathbb{Q}(s|t)$ – поле дробно-рациональных функций над $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$ – группа Галуа поля $\mathbb{Q}(s|t)$;
- $SO_{C^0}(3)$ – каноническая непрерывная структура (связность) на $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$;
- $\mathbb{E}^4_{O,*}/\mathbb{Z}^4$; $\mathbb{E}_O^{4,*}/\mathbb{Z}^4$ – двойственные целочисленные $4d$-решетки;
- $T\mathbb{S}^3$ – глобальное касательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3$;

- $N\mathbb{S}^3$ – глобальное *ко*касательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3$;
- ρ – непрерывное биективное отображение, эквивалентное преобразованиям Ковалевской (выполненных ею в процессе *приведения уравнений Эйлера-Пуассона к интегрируемой суперсимметричной форме* в ее случае), эквивалентные корректно определенному точному отображению – отображению приведения фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона к его канонической нормальной форме в виде:
  - канонической нормальной групповой формы потока больших кругов на сфере $\mathbb{S}^3$,
  - «канонической функциональной платоновой двойственности:

$$\{[S_4,S_4] \xrightarrow{\rho=exp[A_{5,*},A_5^*]} \mathbb{S}^3\} \Leftrightarrow \{[S_4,S_4] \xrightarrow{\rho=exp[A_5,A_5]} \mathbb{S}^3\},$$

где альтернативные группы $A_{5,*,}A_5^*$ – соответственно:

- канонические триангуляции на свободном большом круге $\mathbb{S}^1_{big,*}$ и *ко*круге $\mathbb{S}^{1,*}_{big}$ на сфере $\mathbb{S}^3$,
- генераторы отображений упорядоченной двойственности «$2d$-додэкаэдр – $2d$-икосаэдр» и «$2d$-икосаэдр – $2d$-додэкаэдр»,
- $exp[A_{5,*,}\ A_5^*]$ – генератор отображения упорядоченной двойственности «$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр».

5. Определения компонент формул общего решения

Форма $\Delta_{12}(q)$ – единственная параболическая форма веса 12 относительно группы $SL_2(\mathbb{Z})$ (функция Дедекинда):

$$\Delta_{12}(q) = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi iz}, \quad z \in \mathbb{H}^+$$

и выполнено условие модулярности (автоморфности):

$$\Delta_{12}(q)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12}\Delta_{12}(q),$$

где

- ✓ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $ad - bc = 1$, равенство, определяющее функцию $\Delta_{12}(q)$ как модулярную форму веса 12;
- ✓ $\zeta(\Delta_{12}(q))$ – дзета-функция формы $\Delta_{12}(q)$, определяемая ниже.

Аддитивное представление классической функции $\zeta(\Delta_{12}(q), s)$ имеет вид:

$$\zeta(\mathrm{s}, \Delta_{12}(q)) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s + 11/2)L_\Delta(s),$$

где

$$L_\Delta(s) = L(s, \Delta_{12}(q)) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\tau(n)/n^{11/2}}{n^s}$$

и соответственно, ее мультипликативное представление имеет вид:

$$L_\Delta(s) = L(s, \Delta_{12}(q)) = \prod_p \left(1 - \frac{\tau(p)/p^{11/2}}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right),$$

где p пробегает все множество простых чисел.

6. Схема аналитического получения L-функциональной структуры общего решения уравнений Эйлера-Пуассона (схема доказательства Теорем 1 – 3)

Непосредственные вычисления при получении общего решения уравнений (1) – (2) являются координатным описанием универсальной параметризации их фазовых траекторий обратимым временем $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ и конкретнее:

- представляют каноническую координатизацию эквивариантной компактификации формального времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ формальной бесконечностью ∞ (его канонической аффинно односвязной компактификации) посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

$$\mathbb{C} \cup_{Generator\, \mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty \cong \mathbb{H}_+(q) \cup \infty \bigoplus_{Generator\, \mathbb{Z}_2(t\to -t)} \mathbb{H}_-(\overline{q}) \cup \infty \cong$$

$$\cong \mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})/\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})} \cong \{\mathbb{E}^4_{O,*}/\mathbb{Z}^4 \cong_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} \mathbb{E}^{4,*}_O/\mathbb{Z}^4\} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \otimes_{\frac{i}{2}(s|t)} Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{канонический прямолинейный поток} \\ \text{на трехмерной бутылке Клейна } Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\},$$

  где:
  - $q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}_+$; $\overline{q}$ – комплексно-сопряженное число для q,
  - $Generator\, \mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$, $Generator\, \mathbb{Z}_2(t \to -t)$ – канонические генераторы соответствующих инволюций,
  - $Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$ – трехмерная бутылка Клейна (гиперплоскость в $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$), см. п. 3);
- дают потенциал указанной эквивариантной компактификации формального времени $\mathbb{C}$ – функцию $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

Схема вычислений L-функционального общего решения представляет последовательную координатизацию инвариантов канонической триангуляции («квантования») симметрий $\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4}$ и ее производной симметрии $[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4}, \mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4}]$.

I. Схема вычислений квантового/осцилляторного инварианта $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

1. $Image((\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty)[q, \overline{q}] \stackrel{\rho}{\to} g_P^{s|t}) \cong Z_O^{\mathbb{E}^4}$.

2. $Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4} = Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4} = (Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4})_{CW}$.

3. $(Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4})_{CW(n)} = (Trace\, (Z_O^{\mathbb{E}^4}/Rot)(\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4}/Sym))_{CW(n)} = (\overrightarrow{\gamma_n}, \overrightarrow{\omega_n})_{CW}$.

4. $\overrightarrow{\gamma_n} = (Trace\, (Z_O^{\mathbb{E}^4}/Rot)_{CW(n)})[\frac{\tau(n)}{n^{\frac{11}{2}}}]$ – аппроксимация для векторов $\vec{\gamma}(s|t)$,
   $\overrightarrow{\omega_n} = (Trace\, (Z_O^{\mathbb{E}^4}/Sym)_{CW(n)})[n^{-s}]$ – аппроксимация для векторов $\vec{\omega}(s|t)$.

5. (скалярное произведение $\overrightarrow{\gamma_n}, \overrightarrow{\omega_n})_{CW}$ – сходящиеся при $n \to \infty$ частичные суммы ряда, определяющего функцию $\zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

6. $Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4} = (Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4})_{CW} = \lim_{n\to\infty}(Trace\, Z_O^{\mathbb{E}^4})_{CW(n)} = \zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

II. Схема вычисления производного квантового/осцилляторного инварианта $Trace[\mathrm{Z}_O^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}]$.

$$\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)} \infty \cong \mathbb{H}_+(q) \cup \infty \bigoplus_{\mathbb{Z}_2(t \to -t)} \mathbb{H}_-(\overline{q}) \cup \infty \cong$$
$$\cong \mathbb{E}^4_{O,C^1}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cong \mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})/[\mathrm{Z}_{\mathrm{O}}^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}] \cong$$
$$Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \otimes_{exp(\frac{i}{2}(s|t))} Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{канонический производный прямолинейный поток} \\ \text{на трехмерной бутылке Клейна } Kl^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})\end{matrix}\right\}.$$

1. $Image((\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)} \infty)[q, \overline{q}] \xrightarrow{exp\ \rho} g^{s|t}_{E-P}) \cong [Z_O^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}]$.

2. $Trace[\mathrm{Z}_{\mathrm{O}}^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}] \cong exp(Trace\ Z_O^{\mathbb{E}^4}) = exp\ \zeta(s, \Delta_{12}(q))$.

Вычисление *классов одномерных подкомплексов* указанных в пунктах I и II триангуляционных инвариантов (осцилляторных/квантовых инвариантов) дает:

$$Trace\ (\rho)_{CW_{rk=1}} = \{L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})\},$$

где $(\rho)_{CW_{rk=1}}$ – канонический функциональный *CW*-комплекс для отображения ρ ранга 1, фигурные скобки являются знаком множества.

Важно, что *отображение ρ имеет эквивариантную плоскую структуру*:

- канонического прямолинейного потока (линейного расслоения) на канонической трехмерной бутылке Клейна Kl^3:
$$\rho \cong l(Kl^3) \cong l\{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\};$$
- канонического группового закона на потоке больших кругов (на свободном большом круге) на сфере $\mathbb{S}^3$ с генератором, представляющим отображение упорядоченной двойственности «$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр»,

где:

- $T\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{S}^3/(Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}(Sym, Transl, Rot)/Rot)$ – *глобальное* (*однокартное*) касательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3$;
- $N\mathbb{S}^3 \cong \mathbb{S}^3/(Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}(Sym, Transl, Rot)/Sym)$ – *глобальное* кокасательное расслоение сферы $\mathbb{S}^3$;
- $d\rho$ – корректно определенный дифференциал отображения ρ.

7. Комментарии структуры вычислений

Фазовый поток $g^{s|t}_{E-P}$ уравнений Эйлера-Пуассона представляет каноническую триангуляцию отображения производной центральной симметрии $[Z_O^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}]$, производимую эквивариантной динамической Галуа-симметрией – *4-х местным* (*4-х операндным*) производным коммутантом группы $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$ – отображением канонической полной симметризации *4-х базовых переменных*: аффинных пространственных переменных и аффинного времени исходного классического пространства-времени:

$$Image(([Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)], [Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]) \to PGL(\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4)) \cong$$
$$\cong exp(T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3),$$

$$exp(T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3) \cong SO_{an}(3) \cong g^{s|t}_{E-P},$$

где:

- $PGL(\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4)$ – группа проективных линейных преобразований векторного пространства $\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4$;
- группа $PGL(\mathbb{E}^4/\mathbb{Z}^4) \cong Z_O^{\mathbb{E}^4}$ представляет каноническую линейную (спиральную архимедову) триангуляцию симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}$, как раз и использованную в [1] как основа конструкции доказательства теорем 1 – 3;
- $SO_{an}(3)$ – каноническая аффинно односвязная аналитическая структура на $SO(3,(\mathbb{C}|\mathbb{R}))$;
- $exp\,\rho$ – аффинно односвязное аналитическое отображение;
- $exp\,\rho$ – отображение интегрирования уравнений Ковалевской, эквивалентное корректно определенному отображению «производной канонической функциональной платоновой двойственности»:

$$\left\{\begin{matrix}\text{функциональный}\\ 3d-\text{додэкаэдр}\cong\ T\mathbb{S}^3\end{matrix}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\text{функциональный}\\ 3d-\text{икосаэдр}\cong N\mathbb{S}^3\end{matrix}\right\};$$

- $\{([S_4,S_4],[S_4,S_4]) \xrightarrow{exp([A_{5,*},A_5^*],[A_5^*,A_{5,*}])} \mathbb{S}^3\} \Leftrightarrow \{([S_4,S_4],[S_4,S_4]) \xrightarrow{exp([A_{5,*},A_5^*],[A_5^*,A_{5,*}])} \mathbb{S}^3\}$

  где $exp([A_{5,*},A_5^*],[A_5^*,A_{5,*}])$ – генератор отображения производной упорядоченной двойственности «$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр», представляющий ее автодуальность;
- $exp\,l(Kl^3)$ – канонический аффинно односвязный аналитический групповой закон на потоке больших кругов (или на свободном большом круге) на $\mathbb{S}^3$ с генератором – каноническим собственным сечением эндоморфизма отображения групповой функциональной двойственности $\{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}$;
- взятие производного коммутанта не является тавтологической операцией в контексте его отображения в двойственность $\{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}$: образом производного коммутанта является функциональное уравнение для функции $\zeta(s,\Delta_{12}(q))$.

В силу плоской и групповой структуры отображения ρ предыдущие вычисления канонической эквивариантной триангуляции потока больших кругов с канонической групповой структурой на сфере $\mathbb{S}^3$ просто «экспонируются»:

$$Trace\ exp\,\rho = exp\,\zeta(s,\Delta_{12}(q)),$$

$$Trace\ (exp\,\rho)_{CW} = exp\,L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})),$$

$$[S_4,S_4] \xrightarrow{exp\,\rho=exp(exp[A_5,A_5])} \mathbb{S}^3,$$

$$exp\,\rho \cong exp\,l(Kl^3),$$

где $exp\,l(Kl^3)$ – канонический групповой закон на свободном большом круге на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$, с генератором, представляющим *эндоморфизм* отображения групповой двойственности «$3d$-додэкаэдр – $3d$-икосаэдр».

Появление автоморфной формы $\Delta_{12}(q)$ веса 12 обусловлено тем, что пространство $\mathbb{E}^4_{O,C^0}$ реализуется как орбита групповой фактор-гомотетии $3d$-решетки $\mathbb{E}^3/\mathbb{Z}^3$ вдоль ее 4-х главных диагоналей, коэффициент ограничения которой на ее аффинную область определения $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ равен 12. Данная гомотетия является эквивариантной гомотетией $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ – фазового потока $g^{s|t}_{E-P}$.

Функция $\zeta(s|t,\Delta_{12}(q))$, представляет канонический потенциал:

- непрерывной аффинно односвязной компактификации $\mathbb{C} \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t\to -s|t)} \infty$ формального времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$;
- отображения зеркально обратимого времени уравнений Эйлера-Пуассона:

$$Trace(\mathbb{Z}_2((s|q|t) \leftrightarrow -(s|q|t)) =$$
$$= \{\text{явное выражение ряда для фунции } \zeta(s|(\frac{1}{2}+it), \Delta_{12}(q))\};$$

- биективного отображения модулярной параметризации кривых $E/\mathbb{Q}$: $Image(\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}) \cong \{E/\mathbb{Q}\}$; $Ker(\otimes_{\frac{i}{2}(s|t)}) \cong \{X_{E/\mathbb{Q}}\}$,

где $\{E/\mathbb{Q}\}$ – множество эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$, $\{X_{E/\mathbb{Q}}\}$ – множество модулярных кривых, параметризующих кривые $E/\mathbb{Q}$ (детальнее см. в [1]).

8. Общий интеграл уравнений Эйлера-Пуассона

Вычисление «классических/маятниковых» инвариантов $Trace\ exp(d\rho)$ дает *метрику фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона*:

$$Trace\ d\rho = exp((s|t)^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2),$$

и метрику фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

$$Trace\ exp(d\rho) = |(\omega_1 + i\omega_2 + j\omega_3)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

где

- $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – переменные в уравнениях Эйлера-Пуассона;
- $\{0,1,i,j\}$ – канонический базис свободной гиперплоскости в пространстве $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C})$ – орбите канонического операционного изоморфизма, имеющего место только в размерности 4:

$$\{\mathbb{E}^2 \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}[1,i] \oplus_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[1,j])\} \cong \{\mathbb{E}^2 \times_{\mathbb{C}} \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}[1,i] \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[1,j]\}$$

  и имеющего механический смысл базиса сопровождающего общий волчок тетраэдра (т. е. его упорядоченных реберных медиан). *Вектор* $(0, 1, i, j)$ *имеет смысл Галуа-эквивариантной оси вектора кинетического момента для уравнений* (1) – (2) (см. п. 10).

Данный инвариант также представляет:

- общий интеграл уравнений Эйлера-Пуассона (обозначаемый далее F_{E-P}).
  Отметим, что из аддитивно-мультипликативной операционной диагональности групповой структуры пространства $\mathbb{E}^4_{O,C^0}(\mathbb{C})$, следует, что *условие* $i + j = i \cdot j$, *указанное в монографии* [1] *как дополнительное условие существования этого инварианта, выполняется автоматически в силу указанного операционного изоморфизма*:
  - *это каноническая внутренняя градуировка двойственности* $\mathbb{E}^4_{O,*} \cong \mathbb{E}^{4,*}_O$,
  - *это уравнение фундаментальной области в фазовом пространстве уравнений* (1) – (2);
- каноническую эквивариантную комплексификацию интеграла Ковалевской;
- потенциал полной аффинно односвязной аналитической симметризации переменных $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ s|t$;
- потенциал аффинно односвязной аналитической склейки (классических) интегрируемых случаев уравнений Эйлера-Пуассона в их единый фазовый поток.

Общий интеграл F_{E-P}, рассмотренный над вещественным обратимым временем, является интегралом Ковалевской, найденным ею в специальном случае интегрируемости уравнений (1) – (2):

$$F_{Kow} = |(\omega_1 + i\omega_2)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2)|^2.$$

Интеграл Ковалевской F_{Kow} (парадоксальным с классической точки зрения образом) является *общим интегралом уравнений Эйлера-Пуассона над вещественным временем*.

Соответствующее общее решение уравнений (1) – (2) над $\mathbb{R}$-временем имеет вид:

$$\vec{M}(t) = exp\,\zeta\big(t, \Delta_{12}(q)\big).$$

9. Геометро-динамические интерпретации общего решения

Общее решение уравнений Эйлера-Пуассона реализуется орбитой отображения производной центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}$:

$$\vec{M}(s|t) = [Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}] = d[Transl(\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}), Transl(\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R}))]$$

представляемой**:**

- **динамической 4*d*-моделью (каноническая 4*d*-тригонометрия):**

  - качением общего $4d$-эллипсоида по *свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - качением центрального сечения $4d$-общего эллипсоида по *свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$,
  - общим вращением $4d$-эллипсоида (локально – в евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, а глобально – в вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_O^{281}(\mathbb{R})$ – см. теорему 4)).

  В итоге, в соответствии с теоремой 4, данные $4d$-модели эквивалентны «стандартной геометрической модели» уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\left\{\begin{matrix} \text{отображение } s|t \ \to \vec{M}(s|t) \ \cong \ \text{каноническое общее вращение} \\ \text{стандартного евклидова } 4d - \text{шара, происходящее в пространстве } \mathbb{E}_O^{281}(\mathbb{R}) \end{matrix}\right\}.$$

- **динамической 3*d*-моделью (каноническое 3*d*-представление 4*d*-тригонометрии)** «трехшаровой геометрической безмассовой интерпретацией»:

  - упорядоченной композицией с канонической фактор-групповой структурой отображений качения, поступательного движения, вращения,
  - аналитическим поступательно-вращательно когерентным качением

  трех упорядоченных соприкасающихся стандартных геометрических (безмассовых) $3d$-шаров *по свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3(\mathbb{C}|\mathbb{R})$, где

  - $Ш_1^3 \cong \mathbb{E}^4/(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/Rot) \cong T\mathbb{S}^3$(катящийся геометрический шар),
  - $Ш_2^3 \cong \mathbb{E}^4/(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/(Rot \cong Sym)) \cong \{T\mathbb{S}^3 \cong N\mathbb{S}^3\}$ (шар, операционно синхронизирующий качение геометрического шара $Ш_1^3$ и вращение геометрического шара $Ш_3^3$),
  - $Ш_3^3 \cong \mathbb{E}^4/(Z_O^{\mathbb{E}^4}(Sym, Rot)/Sym) \cong N\mathbb{S}^3$(вращающийся геометрический шар – «кокасательно» катящийся).

Синхронизация качения в операционном контексте означает возможность следующей корректно определенной декомпозиции фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\vec{\gamma}(s|t) \cong Ш_1^3 \otimes_{Ш_2^3} Ш_3^3,$$

$$\vec{M}(s|t) \cong Ш_1^3 \otimes_{exp\,Ш_2^3} Ш_3^3.$$

Отображение когерентного качения $Ш_1^3 \otimes_{exp\, Ш_2^3} Ш_3^3 / Ш_1^3 \otimes_{Ш_2^3} Ш_3^3$ представляет:

- каноническую односвязную экспоненту сферы $\mathbb{S}^3$ (при этом собственно упорядоченные соприкасающиеся шары $Ш_1^3, Ш_2^3, Ш_3^3$ представляют канонический атлас на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$, где:
  - $\otimes_{Ш_2^3}$ – операционная непрерывная склейка для $3d$-шаровых карт $Ш_1^3$ и $Ш_3^3$,
  - $\otimes_{exp\, Ш_2^3}$ – операционная аналитическая склейка для $3d$-шаровых карт $Ш_1^3$ и $Ш_3^3$;

- эквивариантное двулистное накрытие (эквивариантный дубль) канонического глобального расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$, где глобальное расслоение Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$ – образ односвязного аналитического продолжения классического расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$ в его бесконечно удаленный слой (слои глобального расслоения Хопфа – большие круги на $\mathbb{S}^3$, являющиеся орбитами указанного аналитического продолжения).

Отображение когерентного качения $Ш_1^3 \otimes_{exp\, Ш_2^3} Ш_3^3$ представляет корректно определенную аффинно односвязную экспоненту сферы $\mathbb{S}^3$:

$$exp\, \zeta\big(s, \Delta_{12}(q)\big) = exp\, \mathbb{S}^3 = \{\mathbb{S}^3 \xrightarrow{exp[\mathbb{S}^1_{big,*}, \mathbb{S}^{1,*}_{big}]} \mathbb{S}^3\} \cong \{\mathbb{S}^3 \xrightarrow{exp\, \mathbb{S}^1_{big}} \mathbb{S}^3\}.$$

Функции $exp\, L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}))$ представляют:

- циклы когерентного конфигурационно – вращательного отображения качения $exp\, \mathbb{S}^3 \cong Ш_1^3 \otimes_{Ш_2^3} Ш_3^3$, соответствующие:
  - классам эквивалентности слоев $exp[\mathbb{S}^1_{big,*}, \mathbb{S}^{1,*}_{big}]$ для канонического производного глобального расслоения Хопфа,
  - классам изогенности кривых $E/\mathbb{Q}$;

- частные решения уравнений Эйлера-Пуассона (решения их интегрируемых случаев);

- классы неэквивалентных аффинно односвязных аналитических структур на сфере $\mathbb{S}^3$.

Шары (*как множества*) имеют механическую интерпретацию орбит эквивариантной перенормировки классических углов Эйлера φ, θ, ψ посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

- $Ш_1^3 \cong Ш_1^3[\varphi]$ – *орбита универсального угла собственного вращения*;
- $Ш_2^3 \cong Ш_2^3[\theta]$ – *орбита универсального угла нутации*;
- $Ш_3^3 \cong Ш_3^3[\psi]$ – *орбита универсального угла прецессии*.

Общий интеграл F_{E-P} уравнений Эйлера-Пуассона имеет вид:

$$F_{E-P} = Trace\, [Z_O^{\mathbb{E}^4}, Z_O^{\mathbb{E}^4}] = |(p + iq + jr)^2 + (\gamma_1 + i\gamma_2 + j\gamma_3)|^2,$$

где i, j – независимые мнимые единицы (см. комментарии о структуре инварианта $Trace\, exp(d\rho)$), и представляет:

- гамильтониан аналитического трехшарового качения $exp\, \mathbb{S}^3 \cong Ш_1^3 \otimes_{exp\, Ш_2^3} Ш_3^3$,
- потенциал (полную механическую энергию) *универсального* (общего) эллипсоида инерции (таковым эллипсоидом, как отмечено в п.16, является *шаровой эллипсоид*).

Трехшаровая интерпретация эквивалентна:

- $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-эквивариантной коррекции геометрической классической интерпретации Пуансо волчка Эйлера;

- общему, корректно определенному, качению *центрального сечения общего массивного однородного эллипсоида по свободной прямой* $\mathbb{C}|\mathbb{R}$, *ортогональной силовым линиям плоско-параллельного поля классической гравитации.*

10. Глобальная геометрия и алгебра фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона

Условия общего когерентного непрерывного трехшарового качения имеют вид условий, определяющих:

- сферу $\mathbb{S}^3$ как глобальное непрерывное многообразие – многообразие, атлас которого состоит из следующих карт:
  - аффинно непрерывных карт, связанных отношением $\mathbb{S}^1_{big}$-градуировки (эквивариантной $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-суперградуировки),
  - одной карты – *динамической – глобальной* карты, представляющей орбиту центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}(\mathbb{C}|\mathbb{R})$;

- каноническую область определения универсального (аналитического) вращения сферы $\mathbb{S}^3$:
  1) $[0, 1] = \frac{i}{2}$;
  2) $[f, f] = \frac{i}{2}$;
  3) $[f, g] = (-1)^{parity\left(f(modD_2^{diag})\right)parity\left(g(modD_2^{diag})\right)}[g, f]$,
     где $D_2^{diag} \cong Diag(D_2^{+}(Sym, Rot), D_2^{\times}(Rot, Sym))$ – корректно определенная «$+,\times$»-упорядоченная групповая диагональ абелевых аддитивно и мультипликативно записанных групп Клейна D_2^{+} и $D_2^{\times}$. Поэтому данная алгебра (двойственность) реализуется только для трехмерной сферы;
  4) $\left[f, [g, h]\right] + \left[g, [h, f]\right] + [h, [f, g]] = \frac{i}{2}$,
     где f, g, h– канонические образующие отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4}$.

Отметим, что оператор $\frac{i}{2}$ имеет «геометрический релятивистский» смысл канонического:

- центра O евклидова пространства $\mathbb{E}^4$ с канонической непрерывной структурой $\mathbb{E}^4_{O,C^0}$;
- центра $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$, являющейся бесконечно удаленной сферой в пространстве $\mathbb{E}^4_O$ (границей стандартного открытого $4d$-шара в $\mathbb{E}^4_O$).

Определение. Условия 1) – 4) в случае их специализации для отображения центральной симметрии $Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})} \cong Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C})}$ определяют простую (исключительную) функциональную алгебру $e_8(\mathbb{Q}(s))$ как минимальное (дробно-рациональное) мероморфное расширение простой исключительной алгебры Ли $e_8(\mathbb{C})$.

Функциональная алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$ с геометрической точки зрения представляет:

- каноническую триангуляцию, согласованную с эквивариантным коммутатором из условий 1) – 4), орбиты двойственности $\mathbb{E}^4_{O,*}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{E}^{4,*}_O(\mathbb{C})$, локально изоморфную комплексному пространству $\mathbb{C}^8$;

- аффинно односвязное изотропное расширение алгебры Ли $e_8(\mathbb{C})$.

Функциональная алгебра $e_8(\mathbb{Q}(s))$:

- имеет ранг 281;

- представляет фазовое пространства уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем.

Число 281 представляет:

- число *эквивариантных аффинных* степеней свободы уравнений Эйлера-Пуассона над $\mathbb{C}$-временем;
- размерность глобального кокасательного (канонического нормального, изотропного) расслоения $3d$-сферы $\mathbb{S}^3(\mathbb{C})$ – размерность упорядоченного канонического изоморфизма:

$$T_*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}) \overset{\mathbb{S}^1_{big}}{\Longleftrightarrow} T^*\mathbb{S}^3(\mathbb{C}),$$

  орбита которого имеет смысл:
  - канонической однородно-изотропной сферы $\mathbb{S}^3$,
  - канонической «глобальной стандартной» сферы $\mathbb{S}^3$,
  - орбиты канонического потока больших кругов на стандартной аффинной сфере $\mathbb{S}^3$;

- ранг алгебры $su(5, \mathbb{Q}(s))$ – канонического минимального функционального расширения алгебры $su(5)$. При этом функциональную группу $SU(5, \mathbb{Q}(s))$, Ли-двойственную к алгебре $su(5, \mathbb{Q}(s))$, можно интерпретировать как эквивариантную границу открытого стандартного $6d$-шара, представляющего фазовое пространство уравнений (1) – (2).

11. Связь эквивариантной L-функциональной динамики с классической тэта-функциональной динамикой и классической интегрируемостью

Связь $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантной L-функциональной динамики уравнений Эйлера-Пуассона *с их ключевой классической спектральной динамикой,* разделяющей тэта-функциональные лиувиллевы блоки классически (по Лиувиллю-Арнольду) интегрируемых волчков:

- область определения двояко-асимптотических движений – поле $\mathbb{Q}(s|t)$;
- эквивариантно непрерывная динамика на двояко-асимптотических движениях сепаратрисы фазового пространства волчка Эйлера – группа Галуа $Gal\ \mathbb{Q}(s|t)$;
- эквивариантно непрерывная динамика на $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантных невырожденных гиперболических движениях сепаратрисы – производная группа Галуа, под которой понимается ее коммутант $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$;
- эквивариантно непрерывная динамика на $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-инвариантной сепаратрисе – также коммутант $[Gal\ \mathbb{Q}(s|t), Gal\ \mathbb{Q}(s|t)]$.

Геометрическая динамическая трехшаровая интерпретация уравнений Эйлера-Пуассона может быть рассмотрена как образ отображения эквивариантной компактификации (канонической *аффинно односвязной* аналитической компактификации) посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$:

- сепаратрисной динамики классического математического маятника;
- сепаратрисной динамики динамики волчка Эйлера.

Представление фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона в виде глобального расслоения Хопфа (определенного над эквивариантной компактификацией $(\mathbb{C}|\mathbb{R}) \cup_{\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)} \infty$ формального времени $\mathbb{C}|\mathbb{R}$; однокартного) является *динамическим A_5-градуированным расширением* классического расслоения Хопфа сферы $\mathbb{S}^3$:

$$g^{s|t}_{E-P} = exp\,\mathbb{S}^3 = \{\mathbb{S}^3 \xrightarrow{exp(\mathbb{S}^1_{big}[A_5])} \mathbb{S}^2\},$$

где имеется групповое транзитивное действие его слоя – аналитической окружности $exp(\mathbb{S}^1_{big}[A_5])$ на его базе – стандартной сфере $\mathbb{S}^2$.

Данная геометрическая модель является маятниковым представлением фазового потока $g^{s|t}_{E-P}$ и реализует его представление с одной глобальной степенью свободы.

Параметры интегрируемых случаев (общих и частных) уравнений Эйлера-Пуассона *являются параметрами генератора* аналитической градуировки – отображения $exp\,\mathbb{S}^1_{big}$.

В частности, для вещественного случая аффинного времени, размерность этого генератора – дифференциала $d\,(exp\,\mathbb{S}^1_{big}\,(\mathbb{R}))$ (имеющего индуцированную групповую структуру) – равна 20-ти.

Данная группа представляет канонический инвариант уравнений Эйлера-Пуассона – группу их интегрируемых над $\mathbb{R}$-временем случаев.

12. Качественно новые динамические эффекты эквивариантной коррекции уравнений Эйлера-Пуассона

Фазовыми инвариантами полного набора типов интегрируемых волчков являются режимы их *периодической импульсной фазовой упорядоченной многозначной ориентируемости (импульсной динамической мультиориентируемости)*. Эти динамические режимы пропускаются в классическом рассмотрении, и вместе с тем, оказываются принципиально важными в технологическом контексте управления ориентацией орбитальных объектов со сложной геометрией масс.

Данные режимы представляют последовательные периодические «кувырки» волчков – «мгновенные» (δ-образные) смены ориентации фазовых векторов волчков относительно пространства $\mathbb{E}^4_O$ (абсолютной системы отсчета для фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона). Причем, эти осцилляции ориентации имеют *импульсный* (резкий, δ-образный) характер и происходят без воздействия внешних возмущений, т.е. *являются автоколебаниями*.

Такой, с первого взгляда *«возникающий из ниоткуда»*, парадоксальный и *аффинно неаналитический* эффект *импульсной динамической мультиориентируемости* является проявлением фундаментальной собственной (внутренней) зеркальной симметрии фазового пространства уравнений Эйлера-Пуассона, индуцированной их симметрией обратимости по классическому времени.

Оказывается, что эта «механическая зеркальная симметрия» представляет орбиты отображения канонической двойственности конфигурационного пространства и пространства угловых скоростей и визуально демонстрирует физическую реализацию свойства *жесткой (глобальной) аналитичности* (*фазовой твердотельности*) *фазового потока* рассматриваемых уравнений.

Возникающий «кувырковый» эффект (как отображение в пространстве-времени) оказывается *образом отображения аналитического продолжения* классических решений уравнений Эйлера-Пуассона (посредством учета зеркальной симметрии обратимости по времени) в единственную физическую особенность фазового потока – *в точку закрепления универсального* (*общего*) *волчка*.

Эта фундаментальная особенность оказывается крайне нетривиальной («эквивариантно динамической») и соответствует (эквивалентна) особенностям классических (аффинных) фазовых траекторий при их параметризации классическим формальным аффинным (комплексным,вещественным) временем в точках $0,1,\infty$.

Возникающая, качественно новая для классики, *периодическая импульсно Галуа-разрешимая мультиориентированная* фазовая динамика, является «эквивариантным разрешением особенности в точке закрепления универсального волчка». Она находит экспериментальное подтверждение в так называемом эффекте Джанибекова для динамики волчков на околоземных орбитах и, что важно – может быть визуально наблюдаема.

Принципиально, что эта парадоксальная «*фазово* кувырковая» динамика волчков является *конечнопорожденной функциональной* (*автоколебательной*) *инерциальной* динамикой. Наиболее просто (оптимально) эта динамика описывается относительно систем отсчета, включающих *оси их* *фазово твердотельной симметрии,* жестко связанные с волчками (см. [6] – [8]]) – *собственные оси Галуа-эквивариантой линеаризации уравнений Эйлера-Пуассона.*

Важно, что относительно этих систем отсчета волчки становятся неподвижными, т.е. абсолютно равновесными (*абсолютно инерциальными*). Таким образом, исходная, *сильно нелинейная*, аналитическая динамика волчков *перекачивается* в собственную *одностепенную* динамику указанных Галуа-осей и, тем самым, формально линеаризуется.

Математически эта физическая нормализация соответствует канонической нормализации уравнений Эйлера-Пуассона, которая в *канонической аффиной форме представляется уравнениями Ковалевской*. Это влечет явный вид канонической локальной (аффинной) параметризации Галуа-осей генерирующим параметром $\frac{i}{2}d(s|t)$ для «эйлерова описания» фазового потока уравнений Ковалевской.

Неформальная же линеаризация состоит в ключевом «оптимизационном свойстве» Галуа-осей, а именно в их собственной (локальной) *абсолютной инерциальности.*

Ключевой эффект «абсолютной инерциальности» Галуа-осей реализует уже *физическую линеаризацию* аффинно нелинейной динамики волчков.

«Абсолютная инерциальность» имеет смысл «локального» физического времени – физического времени, специализированного для данного конкретного волчка как физического объекта.

Например, для «лагранжева описания» фазового потока уравнений Ковалевской над комплексным временем он таков:

> Галуа-оси равномерно трансляционно перемещаются (это особенность «лагранжева описания») и равномерно вращаются в трехмерном физическом пространстве, причем, это происходит в режиме реального времени относительно «абсолютной конфигурационной системы отсчета» – модельного конфигурационного пространства $\mathbb{E}^4_O$.

Здесь пространство $\mathbb{E}^4_O$ играет роль математической модели конфигурационного пространства для спутников на околоземной орбите, согласованной с известной АГД-моделью гравитационного потенциала Земли (Аксенов – Гребеников – Демин) (см.[1]); точка O расположена в условном геометрическом центре Земли.

Особенность в точке O (в контекте АГД-модели) может быть рассмотрена как модель особенности гравитационного потенциала *гравитационного шарового диполя* (модели для гравитационного потенциала системы «Земля-Луна»), имеющего следующее естественное определение.

Определение. Образ отображения двулистного накрытия *гравитационного шарового монополя* $Image[Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}]$, реализуемое *аффинно 2-связным* каноническим отображением комплексификации отображения фазового потока уравнений Эйлера-Пуассона:

$$[Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{R})}] \to [Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}, Z_O^{\mathbb{E}^4(\mathbb{C}|\mathbb{R})}]$$

является *гравитационным шаровым диполем*.

Следствием модели *гравитационного шарового диполя* является *модель квантования гравитационного поля системы «Земля-Луна»* в виде обобщенного эффекта Джанибекова.

В этом контексте отметим, что искусственные спутники Земли формально приобретают смысл «массивных гравитонов» («пробных зарядов»): например, параметры тестовой «гайки Джанибекова» (масса, спин, скорость) в точности совпадают с определяющими параметрами классического гравитона ({0, 2, c = скорость света в вакууме}) (см. [1]).

Здесь надо отметить, что парадоксальная c-инвариантность «гаек Джанибекова», движущихся с небольшой конечной скоростью относительно корпуса искусственного спутника, следует из скрытой c-инвариантности преобразований Ковалевской. Они обобщают известные преобразования Лоренца в контексте уравнений электродинамики и, как раз, представляют отображение фазового потока «обобщенной гайки» относительно центра шарообразной планеты (модели Земли).

Возмущенная динамика гайки (пробного гравитационного заряда) в рамках этой модели оказывается двойственными автоколебаниями для собственных автоколебаний массивной системы «Земля-Луна».

Такая экспериментально визуализированная орбитальная динамика является интерпретацией общего решения уравнений Эйлера-Пуассона <u>*над формальным комплексным временем*</u> *в виде относительной динамики гравитационного шарового диполя, имеющей смысл общего решения задачи 3-х упорядоченных неточечных центрально гравитирующих масс (тел)* (см. п.14 и [9]).

Также отметим, что динамика Галуа-осей моделируется прямолинейным потоком на канонической трехмерной бутылке Клейна, являющейся каноническим аналитическим продолжением сепаратрисной двояко-асимптотической динамики волчка Эйлера отображением зеркальной инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$.

В частности и гайка Джанибекова *в точности движется по одному из циклов* $3d$*-бутылки Клейна* (*минимальному циклу*) – см. [1] (а не в «малой окрестности сепаратрисы», как, например, указано в одной из первых работ [10] по теории «эффекта Джанибекова»).

13. Небесно-механический смысл общего решения уравнений Эйлера-Пуассона как гравитационного потенциала шарового диполя

Механическим смыслом функций $exp\, L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q})$ являются потенциалы *гироскопических автоколебаний конечной иерархии интегрируемых волчков*, со специальными амплитудно-частотными характеристиками, определяемыми их спектральными кривыми $E/\mathbb{Q}$.

Динамика таких *гироскопических автоколебаний эквивалентна динамике автоколебаний* полностью стабилизированной системы «вращающийся ротор-карданов подвес».

Динамика таких гироскопов представляет каноническую компактификацию обратимым временем классической вращательной твердотельной динамики в классическом аффинном времени. *В обратимом времени* $(s|t)/\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ *классическое* $SO(3)$*-вращение твердых тел канонически дуально центральному гравитационному полю для вращающегося гироскопа.*

В контексте коррекции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-обратимостью по времени существующих моделей гравитационного потенциала шарообразной планеты:

- функция $exp\,\zeta\big(t, \Delta_{12}(q)\big)$ представляет гравитационный потенциал однородного массивного шара (*потенциал шарового гравитационного монополя*);
- функция $exp\,\zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big)$ представляет гравитационный потенциал однородного массивного шарового диполя (*потенциал шарового гравитационного диполя*).

14. Соотношение классической неинтегрируемости и точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона в контексте эквивариантной коррекции КАМ-теории

Особенно важно подчеркнуть, что фундаментальная роль возникающей точной разрешимости уравнений Эйлера-Пуассона состоит *в необходимости* конструктивной и глобализующей коррекции классики.

В частности, рассмотренная центрально-симметричная линеаризующая $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-замена времени для уравнений Эйлера-Пуассона индуцирует «интегрируемую коррекцию классического вердикта о их неитегрируемости» в форме конструктивной *эквивариантно аналитической* (глобально аналитической) коррекции классических *аффинно-аналитических* эффектов хаотизации, порожденных их (аффинно-аналитическими, *не*эквивариантными) возмущениями.

Концептуально эта эквивариантная коррекция состоит в том, что классический КАМ-хаос переходит в сложный, но физически и алгоритмически конструктивный (в конечнопорожденный и Галуа-разрешимый) детерминизм и, что важно, это визуально наглядный детерминизм.

Подчеркнем, что возникающий нетривильный конструктивный детерминизм имеет неклассическую функциональную структуру *«квантования классической $\mathbb{Z}_2$-ориентации»* (образно говоря – структуру *периодической импульсной детерминированной мутации многозначного конечнопорожденного квантования классической ориентации*).

Классические эффекты хаотизации динамики общего возмущения волчка Эйлера корректируются в обобщенный эффект Джанибекова – детерминированную (Галуа-инвариантную, конечнопорожденную) инерциальную динамику с периодическими импульсными режимами *фазовой* мультиориентации и реализуемую в рамках «интегрируемой иерархии волчков» для уравнений Эйлера-Пуассона – конечного упорядоченного множества интегрируемых волчков.

Конструктивно отображение коррекции моделируется производным отображением центральной симметрии евклидова пространства $\mathbb{E}^4_O$, эквивалентным отображению $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}^{24}$, представляющего действие инволюции обратимости по времени на сепаратрисе волчка Эйлера.

Эквивариантная коррекция уравнений Эйлера-Пуассона осуществляет связь между КАМ-теорией и теорией точной разрешимости для уравнений Эйлера-Пуассона:

$$\{\text{механизмы неинтегрируемости}\} \xrightarrow{\text{эквикоррекция}} \{\text{механизм интегрируемости}\}.$$

Эквивариантная коррекция реализует конструктивные отображения «конструктивной детерминизации типов классического хаоса», образы которых имеют «гироскопический солитонный вид» *аналитических δ-функций с распределениями в виде «классического хаоса»:*

$$\{\text{«хаос расщепления сепаратрис»}\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{классы упорядоченных}\\ \text{конфигурационных кувырковых движений}\\ \text{в «интегрируемой иерархии волчков»}\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{«хаос рождения}\\ \text{невырожденных гиперболических движений»}\end{matrix}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{классы упорядоченных}\\ \text{спиновых кувырковых движений}\\ \text{в «интегрируемой иерархии волчков»}\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{«хаос ветвления решений}\\ \text{в плоскости комплексного времени»}\end{matrix}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{классы упорядоченных}\\ \text{конфигурационно} - \text{спиновых кувырковых движений}\\ \text{в «интегрируемой иерархии волчков»} \Leftrightarrow \text{классы (комплексы) аналитических } \delta - \text{функций}\end{array}\right\}$$

.

15. Коррекционный учет симметрии обратимости по времени уравнений Эйлера-Пуассона и их инвариантная форма

Возникающие в процессе линеаризации преобразования исходного аффинного фазового пространства, *индуцированные зеркальной симметрией обратимости* $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$ по аффинному времени уравнений Эйлера-Пуассона:

- перенормируют классическую конфигурационную $SO(3)$-твердотельность в аналитическую фазовую жесткость («глобальную фазовую твердотельность»);
- наделяют фазовое пространство специальной эквивариантной адельной нормой (канонической нормой поля дробно-рациональных функций над $\mathbb{C}$).

Важно подчеркнуть, что отображение транзитивного действия симметрии обратимости по времени в фазовом пространстве уравнений Эйлера-Пуассона оказывается эквивалентным отображению *фазово односвязной (аффинно односвязной) аналитической компактификации* их аффинных фазовых траекторий (обсужденном во «Введении»): *все эквивариантные фазовые траектории являются компактными в классической архимедовой аффинной топологии* (*а классические фазовые траектории, как известно, «почти все» в этой топологии некомпактны*).

Эквивариантная перенормировка симметрией обратимости по времени имеет геометрическую модель:

- вложения группы $SO(3)$ в отображение центральной симметрии четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^4_O$ с фиксированным центром O;
- отображения, канонически двойственного отображению потока больших кругов на стандартной $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$.

В результате симметризующей перенормировки *исходное аффинное (аналитически нежесткое)* фазовое пространство исходных уравнений (1) – (2), локально расслоенное на классические (аффинные) фазовые траектории (как отмечалось, некомпактные с вероятностью 1), становится однозначно определенным *аналитически фазово жестким пространством, расслоенным на компактные аналитически жесткие фазовые траектории – аналитические δ-функции (имеющие смысл трехмерных аналогов классической δ-функции*).

Эквивариантно перенормированное фундаментальной зеркальной симметрией обратимости по времени исходное аффинное фазовое пространство приобретает смысл «универсального фазового волчка», который можно интерпретировать как *каноническое функциональное твердое тело – каноническую трехмерную δ-функцию* (это $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$-*эквивариантно непрерывно перенормированная классическая δ-функция*).

Таким *универсальным (общим) волчком оказывается так называемый «тривиальный волчок»* – волчок с тривиальным (диагональным и единичным) тензором инерции и произвольной точкой закрепления, т.е., «общий волчок максимально специален».

Базовая (для отображения симметризации) «конфигурационная» размерность «4» оказывается критически важной: именно для этой размерности фазовый поток уравнений Эйлера-Пуассона оказывается корректно определенным отображением центральной симметрии четырехмерного евклидова пространства $\mathbb{E}^4_O$ (с фиксированным центром O), представляющим каноническую нормальную форму их фазового потока.

В рамках указанной «центрально-симметричной перенормировки» классическое конфигурационное пространство в виде группы $SO(3)$ играет роль (четной) *аффинной* карты на отображении центральной симметрии пространства $\mathbb{E}_O^4$.

Для соответствия с классикой *важно отметить, что эквивариантная симметризация индуцирует аффинно односвязную аналитическую склейку ветвей «со знаками» перед квадратурами решений классических интегрируемых случаев,* реализуемую симметрией обратимости общих уравнений Эйлера-Пуассона по классическому аффинному времени и происходящую на бесконечности классического аффинного времени.

Отображение проводимой эквивариантной перенормировки (симметризации):

- является многозначным (в итоге, конечнозначным) отображением эквивариантного двулистного накрытия группы $SO(3)$ посредством симметрии их обратимости по времени;
- реализуется преобразованиями Ковалевской, имеющими смысл канонической нормализации уравнений Эйлера-Пуассона;
- представляет каноническую многозначную (в итоге, конечнозначную) линеаризующую замену классического вещественного времени, имеющую специальную групповую и аффинную дробно-линейную структуру, предложенную Ковалевской;
- имеет смысл отображения эквивариантной склейки знаков $\pm$ перед квадратурами решений классических интегрируемых случаев.

Связь эквивариантной перенормировки с «эквивариантной классикой» состоит в том, что *отображение замены времени Ковалевской оказывается изоморфным отображению центральной симметрии исходного аффинного* $6d$*-мерного фазового пространства* $\mathbb{R}^6(\vec{\gamma}, \vec{\omega})$ уравнений Эйлера-Пуассона (индуцированной зеркальной симметрией их обратимости по времени).

Канонически определенное производное отображение указанной $\underline{6d}$-центральной симметрии изоморфно корректному (согласованному с зеркальной симметрией обратимости по времени) отображению фазового потока данных уравнений (и, что важно, также эквивалентно отображению $\underline{4d}$-центральной симметрии пространства $\mathbb{E}_O^4$).

В этом контексте, основная идея по точному решению уравнений Эйлера-Пуассона состоит в том, чтобы записать эти локальные (по классическому аффинному времени) уравнения в инвариантной глобальной (центрально-симметричной) форме, индуцированной их симметрией обратимости по времени, и позволяющей вычислить все их инварианты и получить точные решения.

Эквивалентная формулировка идеи о методе точного решения состоит в нахождении универсальной $(L - A)$-пары для рассматриваемых уравнений.

Инвариантами предлагаемой глобально симметризующей замены времени оказывается полный (и в итоге, конечный) набор иерархически упорядоченных типов интегрируемых волчков (случаев) – фундаментальный структурный инвариант уравнений Эйлера-Пуассона и ряд индуцированных инвариантов, в частности, обсуждаемых ниже.

16. Спектральные данные эквивариантной коррекции уравнений Эйлера-Пуассона

Данные, определяющие потраекторную фазовую динамику в результате глобальной линеаризации исходных уравнений приобретают нетривиальный, но конструктивный вид спектральных данных канонически определенной производной центральной симметрии пространства $\mathbb{E}_O^4$.

Инварианты этой симметрии представляют канонические *эквиваринтные аффинные* спектральные данные уравнений Эйлера-Пуассона, имеющие структуру:

- счетного множества эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$, организованного, в итоге, в векторное пространство со структурой специальной коррекции простой алгебры Ли e_8 (имеющей конечный ранг, равный 281);
- отображения параметризации эллиптических кривых над $\mathbb{Q}$ соответствующими эквивариантными L-функциями – $L|\zeta(s|t, E/\mathbb{Q}))$ (это каноническая форма их параметризации).

Эти спектральные данные алгоритмически конструктивно (через функциональные уравнения для эквивариантных L-функций) преобразуются в спектральные данные аналитической динамики волчков.

Такая динамика оказывается весьма *неклассичной*: она характеризуется *иерархией специальной* геометрии масс волчков и *ассоциированной дуальной иерархией специальной многозначной периодической импульсной (δ-образной) динамической осцилляции их фазовой ориентации*.

17. Квантовая структура общего решения уравнений Эйлера-Пуассона

С формальной точки зрения квантовой структуре общего решения гамильтоновых уравнений (1) – (2) соответствует:

- функциональная структура фазового пространства в виде функциональной алгебры $e_8(\mathbb{Q}(s|t)$ со свойствами гильбертова пространства (например, можно показать, что функциональное пространство L^2 является аффинной картой на его атласе);
- унитарность и самосопряженность оператора фазового потока (следствие теоремы 1); самосопряженность – следствие удовлетворяемости функции $\zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big)$ (метрики фазового пространства) соответствующему функциональному уравнению;
- счетная структура множества спектральных данных – собственных пространств и значений оператора фазового потока с потенциалом $exp\, \zeta\big(s|t, \Delta_{12}(q)\big)$ (см. п. 17).

Важно подчеркнуть, что такое формально математически определяемое квантование имеет механическую реализацию в виде автоколебаний полностью стабилизированной относительной динамики «ротор – карданов подвес».

Соответствие условию трансляционной инвариантности меры на фазовом пространстве для обеспечения квантования по Шредингеру (см. [11]) реализуется эквивалентностью такой гироскопической автоколебательной динамики фазовому потоку колебаний классического математического маятника *около вертикального равновесия – колебаниям изотропного маятника или изотропного осциллятора* (см. п. 1), представляющим *канонический производный геодезический поток больших кругов на стандартной аффинной* $3d$*-сфере* $\mathbb{S}^3$.

Отметим, что *такой маятник* (*осциллятор*) *имеет физический смысл универсальной изотропной релятивизации классического маятника* (*гармонического осциллятора*), ассоциированной с аналитическим продолжением его динамики в вертикальное равновесие (*равновесие изотропного гармонического осциллятора*) посредством инволюции $\mathbb{Z}_2(s|t \to -s|t)$.

Данная динамика является *функциональной периодической динамикой с числом «чистых состояний квантовой системы», равным трансцендентному скалярному инварианту* $exp\, rk(e_8(\mathbb{Q}(s|t)) = e^{281}$ («большое число Рязанцева» – это размерность присоединенного представления алгебры $su(5, \mathbb{Q}(s))$, представляющей каноническое минимальное функциональное расширение алгебры $su(5)$; расширение $su(5, \mathbb{Q}(s))$ по сути рассмотрено Я.В. Рязанцевым как *конфигурационное пространство для производного пространства петель на* $5d$*-сфере* $\mathbb{S}^5$, см. также п. 11).

Число e является:

- каноническим генератором упорядочения полного множества колебаний изотропного маятника;
- *периодом (совпадающим с амплитудой) нулевого автоколебания изотропного маятника* (периодом/амплитудой вертикального равновесия классического маятника в обратимом времени);
- величиной диаметра $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (*априорно обладающей канонической групповой структурой потока больших кругов,* индуцирующей ее свойство изотропности (однородности-изотропности), см. п. 11).

Число 281 представляет:

- размерность канонической изотропной (глобальной) $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$ (см. п. 11), а по сути – просто размерность канонической «трехмерной сферы $\mathbb{S}^3$» («релятивистской $\mathbb{S}^3$»);
- число степеней свободы изотропного маятника (классического математического маятника в вертикальном равновесии над $\mathbb{C}$-временем) (см. п. 1).

Число e^{281} в этом «релятивистком механическом» контексте приобретает смысл фундаментального скалярного инварианта для уравнений Эйлера-Пуассона:

- общее число их неприводимых канонически упорядоченных («чистых») фазовых состояний, занумерованных степенями их канонического *аффинно трансцендентного* генератора в виде классического основания натурального логарифма – числа e;
- коэффициент канонического группового самоподобия канонической изотропной (глобальной) $3d$-сферы $\mathbb{S}^3$;
- *количество точек самоподобной изотропной $3d$-сферы* $\mathbb{S}^3$– число точек фазового потока уравнений (1) – (2).

Важно отметить, что число неприводимых состояний (фазовых точек) уравнений Эйлера-Пуассона конечно в классической архимедовой (локальной, *неэквивариантной*) метрике и бесконечно (счетно) в канонической универсальной (глобальной, *эквивариантной*) метрике на функциональном поле $\mathbb{Q}(s)$, имеющей специальный адельный вид (см.[1]).

Данная *адельная мероморфная метрика* *индуцирует на $3d$-сфере $\mathbb{S}^3$ каноническую функциональную* *аналитическую топологию* – гипотетически физически размерную топологию.

18. Заключение

Уравнения Эйлера-Пуассона определяют новый класс *специальных обобщенных аналитических функций* вида $exp\, L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$ представляющий полное пространство их решений. Данные функции представляют полное пространство инвариантных функций на коприсоединенном представлении простой функциональной алгебры $e_8(\mathbb{Q}(s|t))$, т.е. исходные уравнения интегрируемы в функциональном алгебраическом смысле, обобщающем интегрируемость на конечномерных алгебрах Ли.

Функции $exp\, L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$ *обладают скрытой авторекурсивной $3d$-векторнозначной структурой* на эквивариантном $\mathbb{Z}_3$-градуированном упорядочении нулей функций $L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$, канонически представляющих *счетное (дискретное) пространство состояний исходной классической* (*аффинно континуальной*) *гамильтоновой механической системы*. Поэтому *исходная классическая задача, в итоге, имеет квантовую природу*.

Общее аналитическое решение канонически представляется обобщенной аналитической функцией $exp\, \zeta\big(s|t,\Delta_{12}(q)\big)$ – экспонентной дзета-функции, ассоциированной с канонической модулярной параболической формой Дедекинда веса 12 и имеет смысл универсальной функции для класса функций $exp\, L|\zeta(s|t,E/\mathbb{Q})$. Этот класс функций структурно представляет *класс* *аналитических δ-функций с односвязным шварцевым «аналитическим пробным пространством» – гипотетически класс физически размерных функций в физическом пространстве-времени.*

Таким образом, *«классически неинтегрируемые» уравнения Эйлера-Пуассона являются канонически точно функционально разрешимыми (в том числе, Галуа-разрешимыми)* и вписанными в контекст конструктивной теории эллиптических кривых $E/\mathbb{Q}$, ассоциированной с ключевой для современной математики программы Лэнглендса.

Связь общего решения с классикой описывается конструктивной эквивариантной функционально-арифметической коррекцией классических тэта-функциональных решений (эквивариантной связью «тэта-дзета»), полноценно учитывающей симметрию обратимости по формальному времени исходных уравнений.

Общее решение также обладает механическими, математическими и физическими моделями и интерпретациями, гипотетически *физически размерными,* и позволяющими вывести теорию уравнений Эйлера-Пуассона на новый уровень с новыми прикладными возможностями.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Абраров. Точная разрешимость уравнений Эйлера-Пуассона: дзета-функции и глобальная динамика. М.: Научный мир, 2021, 614 с.

[2] Гашененко И. Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. НАН Украины, Институт прикладной математики и механики, серия «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика». Т.7, Наукова Думка, Киев, 2012, 402 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001, 384 с.

[4] Манин Ю.И. Фробениусовы многообразия, квантовые когомологии и пространства модулей. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002, 344 с.

[5] Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Издательство «Наука»,1976, 672с.

[6] Adlaj S. Dzhanibekov's flipping nut and Feynman's wobbling plate. Polynomial Computer Algebra International Conference, St. Petersburg, Russia, 2016.

[7] Adlaj S., Berestova S.A., Misura N.E., Mityushov E.A. Illustration of rigid body motion along a separatrix in the case of Euler-Poinsot//Computer tools in education, 2018, №2, p.5-13.

[8] Мисюра Н.Е. , Митюшов Е.А. Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела.; Мин-во науки и высш. образования РФ. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2020, 120 с.

[9] Абраров Д.Л. Математическая модель гравитационного потенциала системы «Земля-Луна» в виде общего решения ньютоновой задачи трех тел. Инженерный журнал: наука и инновации, 2018, вып.2 (74); http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1714DOI: 10.18698/2308-6033-2018-2-1734

[10] Петров А.Г., Володин С.Е. "ЭффектДжанибекова" и законы механики// Докл. Академии наук. 2013. Т.451. №4. с.399-403.

[11] Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Квантование по Шредингеру бесконечномерных гамильтоновых систем с неквадратичной функцией Гамильтона// Докл. Академии наук. 2020. Т.492. Математика, информатика, процессы управления, с.65-69.