

# Samtempaj geodezioj ĉe Ŝvarcŝild

## Geodesics of simultaneity in Schwarzschild

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II  
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

25-a de junio, 2010

### Resumo

Samtempa geodezio estas geodezio de spaca tipo kies paroj de najbaraj eventoj estas samtempaj ( $g_{0\mu}dx^\mu = 0$ ). Tiuj geodezioj estas studataj en ekstera regiono de metriko de Ŝvarcŝild.

Geodesic of simultaneity is a spacelike geodesic in which every pair of neighbour events are simultaneous ( $g_{0\mu}dx^\mu = 0$ ). These geodesics are studied in the exterior region of Schwarzschild's metric.

## 1 Enkonduko

Ni konsideras limhavan regionon de spaco-tempo, kaj supozas ke tiu regiono enhavas kelkan graviton. Elektante du eventojn en tiu regiono, ni nomas geodezio, linion kiu unuigas ilin, tiel ke la sumigo de infinitezimaj intervaloj,  $ds$ , en tiu linio estu minimuma per infinitezimaj varioj de tiu linio, estante fiksataj ĝiaj ekstremoj. La spacotempo de relativeca teorio permesas tri tipojn de geodezioj: spacan, nulan, kaj tempan. En geodezio de elektata tipo, ĉiu infinitezima intervalo havas tiun saman tipon.

Kompreneble, fizikistoj zorgas precipe pri tempa geodezio (priskribanta movadon de maso libere fluganta en gravito) kaj pri nula geodezio (priskribanta movadon de lumo). Sed matematiko konsideras ke la tri tipoj es-

## 1 Introduction

We consider a finite region of spacetime, and assume that the region contains some gravitation. Selecting two events in the region, we call geodesic, a line which connects them, such that the sum of all infinitesimal intervals,  $ds$ , in the line be minimum under infinitesimal variations of the line, maintaining fixed the extremities. The spacetime of theory of relativity allows three types of geodesics: spacelike, null, and timelike. In a geodesic of a selected type, every infinitesimal interval has that type.

Naturally, physicists occupy mainly with timelike geodesic (describing motion of mass freely flying in the gravity) and with null geodesic (describing motion of light). Mathematics, nevertheless, considers the three types

tas same gravaj. Tiu fakto stimulis nin atenti spacajn geodeziojn.

Se koordinatoj estas lokataj en la spacotempa regiono, speciala klaso de spacaj geodezioj aperas: la samtempaj geodezioj [1]. En ili, ĉiu infinitezima intervalo havas  $g_{0\mu}dx^\mu = 0$ , estante  $dx^\mu$  la apartigoj de koordinatoj [2, paĝo 350].

Geodezio persistas geodezio per ŝanĝo de koordinatoj, kaj ankaŭ ĝia tipo persistas la sama. Tamen, samtempa geodezio en elektata sistemo povas ne persisti samtempa, kvankam persistas spaca. En ĉi tiu artikolo ni studas samtempajn geodeziojn en la pli ordinara formo de metriko de Ŝvarcŝild [3].

## 2 Ŝvarcŝild

Ni konsideras linielementon

$$\epsilon(ds)^2 = (1 - \rho/r)(cdT)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \rho/r} - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2, \quad (1)$$

estante  $\epsilon = \pm 1$ , kaj estante  $\rho := 2Gm/c^2$  la radiuso de Ŝvarcŝild. En ĉi tiu artikolo ni prizorgas nur la eksteran regionon  $r > \rho$  kaj ni konsideras nur la ebenon  $\theta = \pi/2$ ; do ni uzas

$$\epsilon(ds)^2 = (1 - \rho/r)(cdT)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \rho/r} - r^2(d\varphi)^2. \quad (2)$$

Se intervalo estas de spaca tipo oni uzas  $\epsilon = -1$ , kaj renomias  $ds \rightarrow d\lambda$ . Kaj en linielemento (2), kondiĉo de samtempeco  $g_{0\mu}dx^\mu = 0$  implicas  $dT = 0$ . Tiuokaze (2) plisimpliĝas al

$$(d\lambda)^2 = \frac{(dr)^2}{1 - \rho/r} + r^2(d\varphi)^2, \quad (3)$$

egala al metriko de spacia sekcio en ebena  $\theta = \pi/2$ . Ĉar (3) ne dependas de  $\varphi$ , tial en ĉiu geodezio okazas  $u_\varphi = \text{konst} =: -r_0$ . Konse-

equally important. That fact stimulated us to occupy with spacelike geodesics.

If coordinates are set in the spacetime region, a special class of spacelike geodesics appears: the geodesics of simultaneity [1]. In them, every infinitesimal interval has  $g_{0\mu}dx^\mu = 0$ , with  $dx^\mu$  being the separation of coordinates [2, page 350].

A geodesic remains geodesic under a change of coordinates, and also its type remains the same. However, a geodesic of simultaneity in a selected system may not remain of simultaneity, although it remains spacelike. In this article we study geodesics of simultaneity in the most usual form of Schwarzschild's metric [3].

## 2 Schwarzschild

We consider the line element

where  $\epsilon = \pm 1$ , and where  $\rho := 2Gm/c^2$  is the radius of Schwarzschild. In this article we consider only the exterior region  $r > \rho$ , and we consider only the plane  $\theta = \pi/2$ ; we then use

For a spacelike interval one uses  $\epsilon = -1$ , and redenominates  $ds \rightarrow d\lambda$ . And in the line element (2) the condition of simultaneity  $g_{0\mu}dx^\mu = 0$  implies  $dT = 0$ . In that case (2) simplifies to

equal to the metric of the spacial section in the plane  $\theta = \pi/2$ . Since (3) does not depend on  $\varphi$ , in each geodesic it occurs  $u_\varphi = \text{konst} =:$

kvence  $u^\varphi := d\varphi/d\lambda = g^{\varphi\varphi}u_\varphi = r_0/r^2$ , do  $-r_0$ . Consequently  $u^\varphi := d\varphi/d\lambda = g^{\varphi\varphi}u_\varphi = r_0/r^2$ , so

$$d\varphi = (r_0/r^2) d\lambda, \quad (4)$$

kaj (3) reskribiĝas kiel and (3) rewrites as

$$(dr)^2 = (1 - \rho/r)(1 - r_0^2/r^2)(d\lambda)^2. \quad (5)$$

Tirante  $d\lambda$  el (4) kaj lokante ĝin en (5) oni generas diferencialan ekvacion por samtempaj geodezioj: Extracting  $d\lambda$  from (4) and inserting into (5) one generates a differential equation for the geodesics of simultaneity:

$$(dr)^2 = (r/r_0^2)(r - \rho)(r^2 - r_0^2)(d\varphi)^2. \quad (6)$$

Sen perdi ĝeneralecon, ni supozas ke  $r_0$  estas pozitiva.

Ni rememoras la jenan geometrian fakton: se  $r_0$  estas distanco de Eŭklida rekto al origino, tial en radiusaj infinitoj de rekto okazas  $d\varphi/dr = \pm r_0/r^2$ . Do, farante  $r \rightarrow \infty$  en (6), montriĝas ke samtempaj geodezioj havas *asimptotojn* kies kolizia parametro estas  $r_0$ .

Pozitiveco de  $(dr)^2$  en (6) okazigas du klasojn de solvo kun  $r > \rho$ :

Without loss of generality, we assume  $r_0$  positive.

We remind the following geometrical fact: if  $r_0$  is the distance from an Euclidean straight line to the origin, then at radial infinities of the line it occurs  $d\varphi/dr = \pm r_0/r^2$ . So, taking  $r \rightarrow \infty$  in (6), shows that the geodesics of simultaneity have *asymptotes* whose impact parameter is  $r_0$ .

Positiveness of  $(dr)^2$  in (6) produces two classes of solution with  $r > \rho$ :

- 1 :  $r > r_0 > \rho$ ;
- 2 :  $r > \rho > r_0$ .

Tiuj klasoj estos malkune ekzamenataj.

These classes will be examined separately.

## 2.1 Klaso 1

En klaso  $r > r_0 > \rho$ , la radiusa valoro  $r_0$  indikas perihelion, kaj (6) reskribiĝas kiel

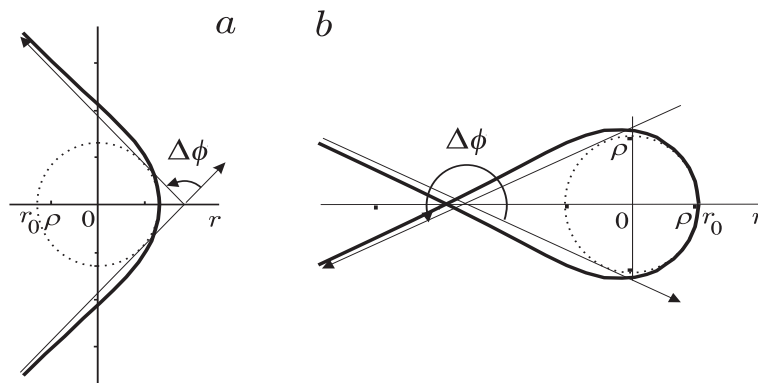
## 2.1 Class 1

In class  $r > r_0 > \rho$  the radial value  $r_0$  indicates perihelium, and (6) rewrites as

$$d\varphi = \pm \frac{r_0 dr}{\sqrt{r(r - \rho)(r^2 - r_0^2)}}. \quad (7)$$

La integro de (7) de  $r_0$  ĝis  $r$  estas elipsa funkcio; vidu figuron 1. La geodezio ĉirkaŭas la

The integral of (7) from  $r_0$  to  $r$  is an elliptic function; see figure 1. The geodesic surrounds



Figuro 1: Du samtempaj geodezioj (dikaj linioj) de klaso 1:  $r > r_0 > \rho$ . Punktitaĵ cirkloj havas radiuson  $r_0$ , kaj la maldikaj linioj estas orientitaj asimptotoj. Ili tanĝas la punktitan cirklon, kaj  $\Delta\phi$  estas la angula vario de unu al la alia. En *a* ni uzis  $r_0 = 4\rho/3$ , farinte  $\Delta\phi \approx \pi/2$ . En *b* ni uzis  $r_0 = 1,04\rho$ , farinte  $\Delta\phi \approx 5\pi/4$ .

Figure 1: Two geodesics of simultaneity (thick lines) of class 1:  $r > r_0 > \rho$ . The dotted circles have radius  $r_0$ , and the thin lines are oriented asymptotes. They tangenciate the dotted circle, and  $\Delta\phi$  is the angular variation from one to the other. In *a* we used  $r_0 = 4\rho/3$ , making  $\Delta\phi \approx \pi/2$ . In *b* we used  $r_0 = 1,04\rho$ , making  $\Delta\phi \approx 5\pi/4$ .

altirantan centron, kaj ju pli granda estas la totala angula vario  $\Delta\phi$  de ĝia tangento, des malpli granda estas la perihelio  $r_0$ .

Tiu vario estas la elipsa funkcio

the attractive center, and the bigger is the total angular variation  $\Delta\phi$  of its geometric tangent, the smaller is the perihelium  $r_0$ .

That variation is the elliptic function

$$\Delta\phi(r_0) = 2 \int_{r=r_0}^{r=\infty} |d\varphi| - \pi, \quad (8)$$

kies grafo estas en regiono  $r_0 > \rho$  en figuro 2. Tie ni vidas ke  $\Delta\phi(\rho) \rightarrow \infty$ . Do oni montras ke en ajn du punktoj (kun  $r > \rho$ ) trapasas nefinia nombro de samtempaj geodezioj.

whose graph is in the region  $r_0 > \rho$  in figure 2. There we see that  $\Delta\phi(\rho) \rightarrow \infty$ . So one shows that through any two points (with  $r > \rho$ ) an infinite number of geodesics of simultaneity passes.

## 2.2 Klaso 2

En klaso  $r > \rho > r_0$ , la pozicio  $\rho$  estas perihelio. Ĉar la kolizia parametro  $r_0$  de la asimptotoj estas malpli granda ol  $\rho$ , tial la *asimptotoj* pasas tra la sfero  $r = \rho$  de Ŝvarcŝild. Por koni la formon de la geodezioj ni integras (7) de  $\rho$  ĝis  $r$ . Vidu figuron 3.

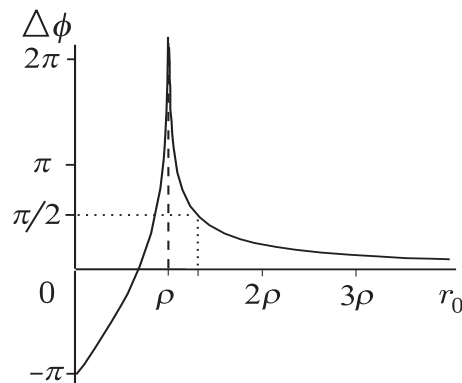
La totala vario de oriento de geodezio estas la integro

## 2.2 Class 2

In the class  $r > \rho > r_0$  the position  $\rho$  is perihelium. Since the impact parameter  $r_0$  of the asymptotes is smaller than  $\rho$ , the *asymptotes* traverse the sphere  $r = \rho$  of Schwarzschild. To know the form of the geodesics we integrate (7) from  $\rho$  to  $r$ . See figure 3.

The total variation of orientation of the geodesic is the integral

$$\Delta\phi(r_0) = 2 \int_{r=\rho}^{r=\infty} |d\varphi| - \pi, \quad (9)$$



Figuro 2: Totala vario  $\Delta\phi(r_0)$  de oriento de samtempa geodezio de klaso 1:  $r > r_0 > \rho$  kaj de klaso 2:  $r > \rho > r_0$ . Speciale, la cirklo kun radiuso  $r_0 = \rho$  estas samtempa geodezio, kun  $\Delta\phi(\rho) = \infty$ . Ne konfuzu ĉi tiun geodezion kun la nula geodezio ankaŭ cirkla, sed kun radiuso  $3\rho/2$ . Malpozitivaj valoroj de  $\Delta\phi(r_0)$  por  $r_0 < 0,67\rho$  indikas ke samtempa geodezio kun tre malgranda kolizia parametro  $r_0$  estas forte forpuŝata de centra maso.

Figure 2: Total variation  $\Delta\phi(r_0)$  of orientation of a geodesic of simultaneity of class 1:  $r > r_0 > \rho$  and of class 2:  $r > \rho > r_0$ . In particular, the circle with radius  $r_0 = \rho$  is a geodesic of simultaneity, with  $\Delta\phi(\rho) = \infty$ . Do not confound this geodesic with the null geodesic also circular, but with radius  $3\rho/2$ . Negative values of  $\Delta\phi(r_0)$  for  $r_0 < 0,67\rho$  indicate that a geodesic of simultaneity with very small impact parameter  $r_0$  is strongly repelled from the central mass.

kies grafo estas en regiono  $r_0 < \rho$  en figuro 2.

whose graph is in the region  $r_0 < \rho$  in figure 2.

### 3 Komentoj

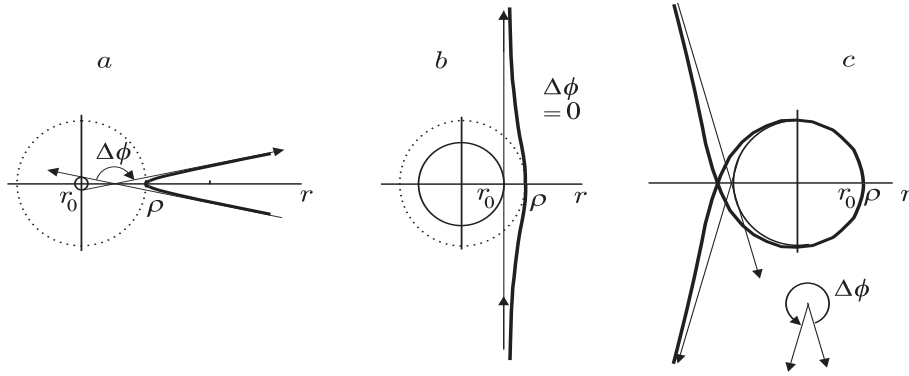
Bonkonate, la samtempaj geodezioj de spacotempo de Minkovski estas Eŭklidaj rekttoj. Tio okazas ankaŭ en spacotempo (1) de Ŝvarcŝild, sed nur en regionoj kun tre malforta gravito ( $r \gg \rho$ ). Tamen, se la kolizia parametro  $r_0$  valoras proksimume la radiuso  $\rho$  de Ŝvarcŝild, do la samtempa geodezio tre malsimilas Eŭklidan rekton, precipe en regionoj ĉirkaŭ  $\rho$ . Tio estas klare vidata en figuroj 1 kaj 3.

Pensu pri Eŭklida trispaco, kun lineielemento  $(d\lambda)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ , kaj pri la paraboloido  $z^2 = 4\rho(r - \rho)$ , rotacianta ĉirkaŭ akso  $z$ . Uzante tiujn du ekvaciojn, la lineielemento de paraboloido estas (3), la sama lineielemento kies geodezioj estas la samtempaj geodezioj de Ŝvarcŝild kun  $\theta = \pi/2$ . Geodezio de klaso 1 rilatas al geo-

### 3 Comments

As is well known, the geodesics of simultaneity of Minkowski spacetime are Euclidean straight lines. The same occurs in Schwarzschild spacetime (1), but only in regions with very weak gravitation,  $r \gg \rho$ . However, if the impact parameter  $r_0$  is nearly the radius  $\rho$  of Schwarzschild, the geodesic of simultaneity differs greatly from an Euclidean straight line, especially in regions near  $\rho$ . That is clearly seen in figures 1 and 3.

Consider Euclidean three-space, with line element  $(d\lambda)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ , and the paraboloid  $z^2 = 4\rho(r - \rho)$ , of revolution around the  $z$ -axis. Using these two equations, the line element of the paraboloid is (3), the same line element whose geodesics are those of simultaneity of Schwarzschild with  $\theta = \pi/2$ . A geodesic of class 1 corresponds to a geodesic



Figuro 3: Tri samtempaj geodezioj (dikaj linioj) de klaso 2:  $r > \rho > r_0$ . La punktitaĵoj havas radiuson  $\rho$ , kaj la ne punktitaĵoj havas radiuson  $r_0$ . La maldikaj linioj estas orientitaj asimptotoj. Ili tanĝas la cirklojn kun radiuso  $r_0$ ; la angula vario de unu al la alia estas  $\Delta\phi$ . En *a* ni uzis  $r_0 = 0,1\rho$ , farinte  $\Delta\phi < 0$ ; en *b* ni uzis  $r_0 \approx 0,67\rho$ , farinte  $\Delta\phi = 0$ ; kaj en *c* ni uzis  $r_0 = 0,99\rho$ , farinte  $\Delta\phi > 0$ .

Figure 3: Three geodesics of simultaneity (thick lines) of class 2:  $r > \rho > r_0$ . The dotted circles have radius  $\rho$ , and the non-dotted have radius  $r_0$ . The thin lines are oriented asymptotes. They tangenciate the circle with radius  $r_0$ , and  $\Delta\phi$  is the angular variation from one to the other. In *a* we used  $r_0 = 0,1\rho$ , making  $\Delta\phi < 0$ ; in *b* we used  $r_0 \approx 0,67\rho$ , making  $\Delta\phi = 0$ ; and in *c* we used  $r_0 = 0,99\rho$ , making  $\Delta\phi > 0$ .

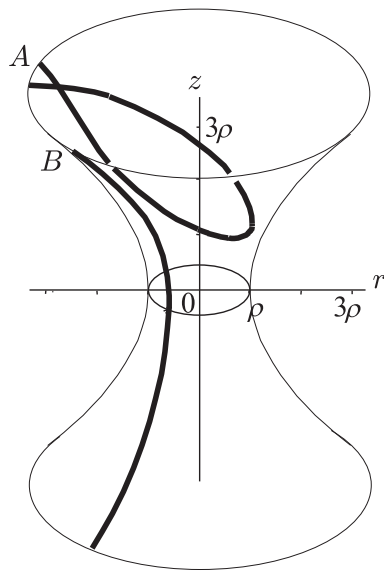
dezio de paraboloido kiu ne trairas ekvatoron  $r = \rho$  de paraboloido, kaj geodezio de klaso 2 rilatas al tiu kiu trairas. Vidu figuron 4.

of the paraboloid not traversing the equator of the paraboloid, and a geodesic of class 2 corresponds to one that traverses. See figure 4.

## Citaĵoj

## References

- [1] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – II / La relativeca tempo – II*, baldaŭ aperonta en arXiv[physics].
- [2] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).
- [3] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild / Doppler effects in Schwarzschild*, arXiv:0912.1229; CBPF-NF-023/09.



Figuro 4: Skizo de paraboloido  $z^2 = 4\rho(r - \rho)$ , kaj du el ĝiaj geodezioj.  $A$  estas geodezio ne traŭranta ekvatoron  $r = \rho$  de paraboloido, kaj rilatas al samtempa geodezio de Ŝvarcŝild en figuro 1b.  $B$  estas geodezio kiu traŭras, kaj rilatas al samtempa geodezio en figuro 3a.

Figure 4: Sketch of paraboloid  $z^2 = 4\rho(r - \rho)$ , and two of its geodesics.  $A$  is a geodesic not traversing the equator  $r = \rho$  of the paraboloid, and relates to a geodesic of simultaneity of Schwarzschild as in figure 1b.  $B$  is a geodesic that traverses, and relates to a geodesic of simultaneity as in figure 3a.