А. Г. Штерн, П. Г. Штерн

Построение математической модели физического явления без введения ненаблюдаемых непосредственно величин

Центральное взаимодействие тел, как обнаруживающееся через изменение времени пробега сигнала между ними, временного интервала. Описание взаимодействия, таким образом, не содержит ненаблюдаемого при падении тел на землю и движении небесных тел. В физических построениях полагается, что наблюдатель располагает дальнодействующим средством наблюдения, необходимость внедрения в уравнения силы, массы , искусственного как в уравнение задачи Кеплера или уравнение Шредингера, а с ними энергии и работы отсутствует. Подход допускает вывод аналогов уравнений Лагранжа второго рода и уравнений Гамильтона. Рассматриваются отдельные примеры и виды уравнений для некоторых случаев.

A. G. Stern, P. G. Stern

Making Up of the Mathematical Model of a Physical Phenomenon without Introduction of Non-Observable Directly Sizes

The central interaction of bodies, as which is found through change of a transit time of a signal between them, a temporary interval. The description of interaction, thus, doesn't contain non-observable one when bodies are falling on the earth and celestial bodies' motion. In physical constructions it is suggested that an observer should possess a long-range means of observation, the necessity of implementing into the power equations, weight, artificial as in the equation of the sum of Kepler or Schrödinger's equation, and with them energy and work are absent. The approach makes possible exclusion of analogs of Lagrange equations of the second sort and Hamilton equations. Separate examples and types of the equations for some cases are regarded.

Предлагаемая ниже работа, выполненная на примерах механического взаимодействия, представляет довольно широкий интерес, хотя бы гносеологический для различных отраслей физики. Ведь, если окажется, что принятая модель согласуется с экспериментом, но содержит ненаблюдаемые непосредственно величины, всегда есть соблазн предположить, что согласованность с экспериментом служит подтверждением реального существования объекта, отвечающего обозначающей его в модели величине. Поэтому, резонно полагать, что поиск наиболее лаконичных математических моделей сохранит актуальность, так же как несомненна актуальность построения математических моделей продолжающихся наблюдений вновь обнаруживаемых свойств физических объектов.

Одним из построений математической модели физического явления направленным на уменьшение количества вводимых ненаблюдаемых непосредственно величин является исключение силы Кельвином и Герцем, о котором пишется, например, в работах [1],[5]. Изложенное ниже построение исходит из наблюдений за падением тел на Землю и за строением солнечной системы, которые показывают, что в пустоте:

- различные тела падают одинаково, начав падать одновременно, они движутся с одинаковой скоростью;
- падение представляет собой ускоренное движение и происходит с постоянным ускорением, на расстояниях близких к поверхности Земли;
- ускорение падения величина обратно пропорциональная квадрату расстояния между телами, если расстояние много больше размеров каждого из них.

Перечисленное описывает содержание взаимодействия тел без включения в описание ненаблюдаемых представлений и не измеряемых непосредственно величин массы и силы.

Расстояние между телами и другие протяжённости, входящие в определения пути, скорости и ускорения заменяются временем необходимым для проявления изменения происшедшего с одним телом на ином находящемся во взаимодействии с ним теле.

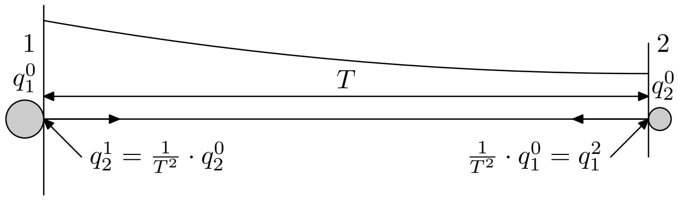

Рис.1

Рис. 1 поясняет описание взаимодействия тел. T – «Расстояние» между телами 1 и 2 характеризуется величиной продолжительности времени необходимой для того, чтобы изменение происшедшее с телом 1 проявилось на теле 2 и наоборот, отметим, что в случае дальнодействия, т.е. пренебрежения релятивистскими эффектами, расстояние выражается в единицах времени, путем деления промежутка между телами, измеряемого в единицах длины на скорость распространения сигнала, например на скорость света, q_1^0 – модуль величины ускорения свободного падения на поверхность тела 1, одинаковой для любых падающих тел, умноженной на квадрат радиуса тела 1. Аналогично, q_2^0 – модуль величины ускорения свободного падения на поверхность тела 2, одинаковой для любых падающих на него тел, умноженной на квадрат радиуса тела 2. Радиус тела определятся по среднему радиусу слоя, в котором модуль ускорения свободного падения не меняется. Для описания взаимодействия тел толщина этого слоя пренебрежима. График убывания ускорения свободного падения с «удалением» от тела 2, подобный приведённому для тела 1, на рис. 1. не показан. Поскольку все падающие на какое-либо тело тела падают на него одинаково, ускорение свободного падения на это тело является его единственной характеристикой отличающей его в данном взаимодействии от других тел. Наблюдения строения солнечной системы приводят к заключению, что по мере удаления от тела, на которое происходит свободное падение, ускорение свободного падения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от тела, на которое происходит падение. Поэтому названной выше характеристикой тела может служить значение ускорения свободного падения на его поверхности или в близости к ней, по отношению к «расстоянию» между телами, иначе к времени необходимом для того, чтобы изменение происшедшее с одним взаимодействующим телом проявилось на другом взаимодействующем теле, и наоборот.

Описание взаимодействия тел, отвечающее рис. 1 и вышеизложенными замечаниями к нему, приводит к следующей формулировке закона взаимодействия

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right). \tag{1}$$

Если полагать, что телом является любая совокупность чувственно или инструментально выделяемых неоднородностей обладающих свойством взаимодействия, в частности попарного и ведущего к увеличению времени необходимого для того, чтобы изменение происшедшее с одним взаимодействующим телом проявилось на другом взаимодействующем теле, то в правой части закона взаимодействия вместо минуса будет стоять плюс.

Положим, что ускорением свободного падения на тело 2 можно пренебречь по сравнению с таковым для падения на тело 1. Формула 1 примет вид

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{T^2} q_1^0. \tag{2}$$

При вычислении второй производной стоящей в левой части выражения (2) следует учесть кинематические соотношения, связанные с начальными условиями для тела 2, обладающего скоростью V_2, см. рис. 2, по отношению к телу 1, принимаемому за полюс в полярной системе координат, где T будет рассматриваться как модуль вектора направленного от тела 1 к телу 2. Тогда в левой части выражения (2) произойдёт учёт радиального и трансверсального ускорения. Уравнение (2) примет вид

$$\ddot{T} - T\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{T^2} q_1^0 \tag{3}$$

где θ – отсчитываемый против часовой стрелки угол а точка над буквой означает производную по времени. Трансверсальное же ускорение будет

$$\ddot{\theta}T^2 + 2\dot{\theta}\dot{T} = 0 \tag{4}$$

Откуда следует

$$T^2\dot{\theta} = const. \tag{5}$$

т.е., что радиус-вектор, модуль которого T, проведённый из начала координат к падающему телу, описывает в равные времена равные площади.

Рассмотренный пример использования описания формулой (1) взаимодействия тел представляет собой математическую модель проблемы Кеплера. Обратим внимание на то, что формула (1) описывает свободное падение тел друг на друга, а при замене минуса на плюс в правой части формулы, свободное разбегание их, в то время как проблема Кеплера касается несвободного падения тел, что повлекло использование кинематических соображений при раскрытии состава второй производной $\frac{d^2T}{dt^2}$. В природе нет свободных падений или разбеганий. Приближённо они реализуются в экспериментах. Несвободные парные падения и разбегания являются сочетаниями парных взаимодействий с непренебрежимыми последствиями пренебрежимых взаимодействий с третьими телами. Характерно, что квазистационарность нашего мира основывается на приблизительной цикличности падений в двух взаимно перпендикулярных направлениях, т.е. падениях с непрерывным промахом относительно центра падения, например, движение по круговой или эллиптической орбите.

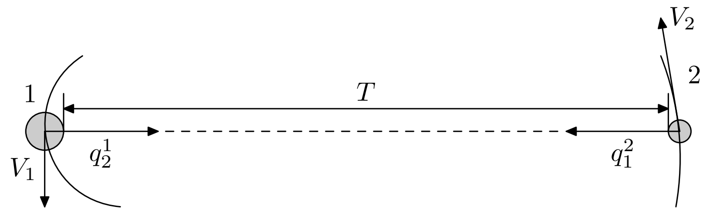

Рис.2

Теперь положим, что ускорением свободного падения на тело 2 нельзя пренебречь по сравнению с таковым для падения на тело 1. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\ddot{T} - T\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right). \tag{6}$$

Для «n» взаимодействующих тел, учитывая, что тела сами с собой не взаимодействуют и взаимодействие каждой пары тел симметрично, напишем систему уравнений, приведенную в работе [6]:

$$\sum_{i=j+1}^{n} \ddot{T}_{ji}\frac{\vec{T}_{ji}}{T_{ji}} = \sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{C_{ji}}{T_{ji}^3} - \frac{q_i^0}{T_{ji}^2} - \frac{q_j^0}{T_{ji}^2}\right)\frac{\vec{T}_{ji}}{T_{ji}}; \tag{7}$$

где $j = [1\ldots(n-1)]$ и $i = j+1$ являются номерами взаимодействующих тел пронумированнных в любой выбранной последовательности; T_{ji} – для тел j и i то же, что и T на рис. 1 для тел 1 и 2; $\ddot{T}_{ji}$ – вторая производная величины расстояния T_{ji} между телами j и i; q_i^0 и q_j^0 – ускорения свободного падения на поверхности тел i и j; C_{ji} – константа, появляющаяся вследствие замены в первом члене правой части системы уравнений (7) выражения $T_{ji}\cdot\dot{\theta}_{ji}^2$ тождественным $\frac{\dot{\theta}_{ji}^2 T_{ji}^4}{T_{ji}^3}$, в котором произведение $\dot{\theta}_{ji}^2 T_{ji}^4$ равняется $(T_{ji}^2\cdot\dot{\theta}_{ji})^2$ то есть является $(const._{ji})^2$ [см. уравнение (5)] и может быть обозначена как C_{ji}. При суммировании в системе уравнений (7) каждое фиксированное j, означает номер тела, рассматриваемого как центр направлений падения остальных, указываемых по возрастанию, начиная с $j+1$, номеров i, взаимодействующих с телом j тел, так, что соответствующие им слагаемые, помечены индексами i меняющимися от величины $i = j+1$ до величины $i = n$, включительно. Такой порядок учитывает что $\ddot{T}_{ji} = \ddot{T}_{ij}$, и исключает двойное вхождение в систему величин $\ddot{T}_{ji}$.

Умножим проекцию на прямую взаимодействия каждого уравнения системы (7) на бесконечно малое смещение δr_{ji}:

$$\delta r_{ji}\ddot{T}_{ji} = \left(\delta r_{ji}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^3} - \delta r_{ji}\frac{q_i^0}{T_{ji}^2} - \delta r_{ji}\frac{q_j^0}{T_{ji}^2}\right).$$

Левые части полученных в результате умножения уравнений, используя, что $\delta r_{ji} = \delta T_{ji}$, преобразуем к виду

$$\sum_{i=j+1}^{n} \delta r_{ji}\ddot{T}_{ji} = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}(\dot{T}_{ji}\delta r_{ji}) - \dot{T}_{ji}\frac{d}{d\tau}\delta r_{ji}\right] = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \dot{T}_{ji}\frac{d}{d\tau}\delta T_{ji}\right] =$$
$$= \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \dot{T}_{ji}\delta\dot{T}_{ji}\right] = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\dot{T}_{ji}\right)^2\right].$$

Правые части полученных в результате умножения уравнений преобразуем как

$$\sum_{i=j+1}^{n}\left(\delta r_{ji}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^3} - \delta r_{ji}\frac{q_i^0}{T_{ji}^2} - \delta r_{ji}\frac{q_j^0}{T_{ji}^2}\right) = \sum_{i=j+1}^{n}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta r_{ji}}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2}\delta r_{ji}\right) + \delta\left(\frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=j+1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\delta\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \delta\left(\frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right)\right] = \delta\sum_{i=j+1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right).$$

Теперь соединим преобразованные левую и правую части знаком равенства и проинтегрируем полученные уравнения на интервале времени от τ_1 до τ_2, принимая во внимание, что на концах интервала вариации, иначе бесконечно малые смещения δr_{ji}, равны нулю по определению. Соответственно получаем:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\dot{T}_{ji}\right)^2\right]d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta\sum_{i=j+1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right)d\tau;$$
$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{d}{d\tau}\sum_{i=j+1}^{n}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right)d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\delta\sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{T}_{ji}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right]d\tau;$$

в последнем варианте записи уравнений:

$$\left.\sum_{i=j+1}^{n}\left(\dot{T}_{ji}\delta T_{ji}\right)\right|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0,$$

так как $\delta T_{ji}\big|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0$ по указанной выше причине, имеем

$$\delta\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{i=j+1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{T}_{ji}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right]d\tau = 0.$$

Введём обозначения

$$L_j = \sum_{i=j+1}^{n}\left(\frac{1}{2}\dot{T}_{ji}^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} + \frac{q_i^0}{T_{ji}} + \frac{q_j^0}{T_{ji}}\right), \qquad L = \sum_{j=1}^{n-1}L_j$$

$$T_j = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2}\dot{T}_{ji}^2 \quad \text{и} \quad U_j = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{T_{ji}^2} - \frac{q_i^0}{T_{ji}} - \frac{q_j^0}{T_{ji}} \right), \qquad T = \sum_{j=1}^{n-1} T_j, \qquad U = \sum_{j=1}^{n-1} U_j.$$

Тогда в привычных обозначениях будем иметь $L = T - U$. При том, если за L, на наш взгляд, может быть сохранено прежнее название – функция Лагранжа или кинетический потенциал, то T и U в рамках данной модели должны получить новые наименования, например: – обобщённый потенциал скоростей, U – обобщённый потенциал положений. Далее отметим, что

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\dot{T}_{ji}, T_{ji}\right) d\tau = S \quad - \quad \text{действие механической системы}$$

в L входят скаляры $\dot{T}_{ji}^2$, T_{ji}, а так же $\frac{q_i^0}{T_{ji}}$ и $\frac{q_j^0}{T_{ji}}$. Следовательно, $L = L\left(\dot{T}_{ji}, T_{ji}\right)$ – скалярная функция скалярных аргументов. Варьирование действия механической системы будет выглядеть так

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(\dot{T}_{ji}, T_{ji}\right) d\tau = 0 \qquad \text{или} \qquad \delta S = 0,$$

а соответствующие выкладки по выводу уравнений Лагранжа ничем не будут отличаться от таковых, которые приводятся в курсах теоретической и аналитической механики [2],[3]. По этой причине воспроизведём их ниже без каких-либо пояснений

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial L}{\partial T_{ji}} \delta T_{ji} + \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta \dot{T}_{ji} \right) d\tau = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta \dot{T}_{ji} = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta \frac{d}{T_{ji}} d\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \frac{d}{d\tau} \delta T_{ji} =$$

$$= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta T_{ji} \right) - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \right) \delta T_{ji}, \qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta T_{ji} \right) d\tau = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \delta T_{ji} \Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2} = 0,$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial L}{\partial T_{ji}} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} \right) \delta T_{ji} d\tau = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} - \frac{\partial L}{\partial T_{ji}} = 0. \tag{8}$$

Результат выкладок (8) имеет вид уравнений Лагранжа второго рода.

Обозначим как p_j величину $\frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{T}_{ji}}$ поскольку U от $\dot{T}_{ji}$ не зависит, так что будем иметь выражение $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}}$. При этом p_j не может называться обобщённым импульсом, тем более, что производная по $\dot{T}_{ji}$ для фиксированного в выражении $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_{ji}}$ индекса j, определяется как

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial T_j}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial}{\partial \dot{T}_{ji}} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2}\dot{T}_{ji}^2 = \sum_{i=j+1}^{n} \dot{T}_{ji}.$$

Возможное новое наименование – обобщённая скорость изменения взаимодействия.

Известно, что (см., например, [4], последний снизу абзац на стр. 129) переход от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона есть процесс чисто математический, не имеющий никакого отношения к исходной динамической системе и, что для любой описываемой уравнениями Лагранжа системы будут иметь место уравнения Гамильтона. Поэтому, так же как и выше для уравнений Лагранжа, приведём относящиеся к этому процессу выкладки без пояснений. Введём функцию Гамильтона

$$H\left(T_{ji}, p_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} p_j \dot{T}_{ji} - \sum_{j=1}^{n-1} L_j\left(\dot{T}_{ji}, T_{ji}\right),$$

$$dH = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial T_{ji}} dT_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j d\dot{T}_{ji} + \sum_{j=1}^{n-1} \dot{T}_{ji} dp_j \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}} d\dot{T}_{ji} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}} dT_{ji},$$

$$p_j = \frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}, \qquad dH = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}} d\dot{T}_{ji} + \sum_{j=1}^{n-1} \dot{T}_{ji} dp_j \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}} d\dot{T}_{ji} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}} dT_{ji} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \dot{T}_{ji} dp_j - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}} dT_{ji} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial T_{ji}} dT_{ji} \right),$$

а это значит, что $\dot{T}_{ji} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ и $\frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}} = -\frac{\partial H}{\partial T_{ji}}$, откуда, используя $p_j = \frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}}$ и уравнения Лагранжа $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L_j}{\partial \dot{T}_{ji}} = \frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}, \frac{dp_j}{d\tau} = \frac{\partial L_j}{\partial T_{ji}}$, получаем уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\dot{T}_{ji} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial H}{\partial T_{ji}} \quad (j = 1, \ldots n). \tag{9}$$

Особенные затруднени описание содержания взаимодействия тел, без включения в рассмотрение как не измеряемых непосредственно величин массы и силы, способно вызвать при изучении технических устройств. Причиной чему привычность и наглядность наработанных решений и моделей.

Показательным может служить пример с рычажными весами. Взвешивание фундаментальная процедура, лежащая в основе всех экспериментов и теорий, связанных с понятием силы.

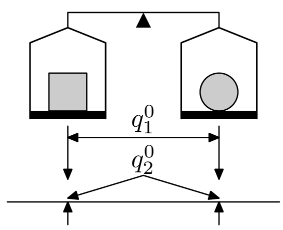

Рис. 3

На рис. 3 показано, что весы находятся в равновесии. Условию равновесия отвечает равенство ускорений свободного падения земли на тела, лежащие на левой и правой чашках весов. Для случая равновесия, эти ускорения и обозначены одинаково, как q_2^0 Верхний индекс 0, так как влияние расстояния между телами и земной поверхностью пренебрежимо. Ускорения свободного падения тел, лежащих на левой и правой чашках весов, как ускорения свободного падения на землю всегда одинаковы, независимо от положения рычага весов и параметров тел, лежащих на чашках. Примером способа приведения одного тела в состояние покоя относительно другого взаимодействующего с ним тела, является известный опыт А.Ф. Иоффе, усовершенствованный вариант опыта Р. Милликена. Ускорение свободного падения компенсировалось притяжением электрически заряженной частицы к пластине заряженного конденсатора.

Несмотря на то, что представляется очевидной возможность описания кулоновского взаимодействия в виде соответствующем выражению (6), нелишне, из-за наличия некоторых особенностей, проделать эту работу. Для краткости, не будем вдаваться в разбор опытов и их истолкований, которые способны привести нас к необходимым соотношениям. Будем исходить из слегка переиначенной формы закона Кулона.

$K\frac{q_1 \cdot q_2}{R^2} = m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2$; иначе $K\frac{q_1 \cdot q_2}{m_1 \cdot R^2} = a_1$ и $K\frac{q_1 \cdot q_2}{m_2 \cdot R^2} = a_2$. Здесь K – константа имеющая знак «+» или «−» в зависимости от того падают друг на друга или разбегаются друг от друга заряженные тела: R – расстояние между телами; q_1 и q_2 – заряды тел, m_1 и m_2 – массы заряженных тел, а ускорения, вызванные зарядами: a_1 и a_2. Теперь выпишем, преобразуя закон Ньютона, ускорения свободного падения для наших заряженных тел: $G\frac{m_2}{R^2} = g_1$ и $G\frac{m_1}{R^2} = g_2$, где G константа. Откуда $m_1 = \frac{g_2 \cdot R^2}{G}$ и

$m_2 = \frac{g_1 \cdot R^2}{G}$, выражения, которые подставим в формулы для a_1 и a_2, в результате чего получим, что $a_1 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_2 \cdot R^4}$ и $a_2 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_1 \cdot R^4}$, а вспоминая, что $g_1 = \frac{g_1^0}{R^2}$ и $g_2 = \frac{g_2^0}{R^2}$, где g_1^0 и g_2^0 имеют тот же смысл скорректированного на квадрат радиуса тела модуля величины ускорения свободного падения на поверхность тела какой в уравнении (1) имеют $\left|q_1^0\right|$ и $\left|q_2^0\right|$, затем подставляя g_1 и g_2 в выражения для a_1 и a_2 будем иметь $a_1 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_2^0 \cdot R^2}$ и $a_2 = K \cdot G \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{g_1^0 \cdot R^2}$.

С учётом проделанных выкладок и изменений в обозначениях, уравнение (6) примет вид:

$$\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -\frac{K \cdot G \cdot q_1 \cdot q_2}{R^2} \cdot \left(\frac{1}{g_2^0} + \frac{1}{g_1^0}\right). \tag{10}$$

Аналогично, (3) будет выглядеть как:

$$\sum_{i=j+1}^{n} \ddot{R}_{ji} \frac{\vec{R}_{ji}}{R_{ji}} = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{C_{ji}}{R_{ji}^3} - \frac{K \cdot G \cdot q_j \cdot q_i}{R_{ji}^2} \cdot \left(\frac{1}{g_i^0} + \frac{1}{g_j^0} \right) \right) \frac{\vec{R}_{ji}}{R_{ji}}. \tag{11}$$

Повторяя приведённый выше вывод уравнения Лагранжа и, вводя обозначения

$$L_j(\dot{R}_j, R_j) = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\dot{R}_{ji}^2 - \frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{R_{ji}^2} + \frac{K \cdot G \cdot q_j \cdot q_i}{R_{ji}} \cdot \left(\frac{1}{g_i^0} + \frac{1}{g_j^0} \right) \right), \qquad L = \sum_{j=1}^{n-1} L_j$$

$$T_j = \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2}\dot{R}_{ji}^2 \quad \text{и} \quad U_j = \sum_{i=j+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\frac{C_{ji}}{R_{ji}^2} + \frac{K \cdot G \cdot q_j \cdot q_i}{R_{ji}} \cdot \left(\frac{1}{g_i^0} + \frac{1}{g_j^0} \right) \right), \qquad T = \sum_{j=1}^{n-1} T_j, \qquad U = \sum_{j=1}^{n-1} U_j,$$

будем иметь $L = T - U$, так, что, в конце концов, получим:

$$\frac{d}{d\tau} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{R}_{ji}} - \frac{\partial L}{\partial R_{ji}} = 0. \tag{12}$$

Функция Гамильтона в том же виде, что и выше, но с изменёнными обозначениями, выглядит как

$$H(p_j, R_{ji}) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} p_j \dot{R}_{ji} - \sum_{j=1}^{n-1} L_j \left(\dot{R}_{ji}, R_{ji} \right)$$

Где, так же как и выше

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{R}_{ji}} = \frac{\partial T_j}{\partial \dot{R}_{ji}} = \frac{\partial}{\partial \dot{R}_{ji}} \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{2}\dot{R}_{ji}^2 = \sum_{i=j+1}^{n} \dot{R}_{ji}$$

а уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\dot{R}_{ji} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial R_{ji}} \quad (j = 1, \ldots n). \tag{13}$$

Очевидна возможность обобщения применённого способа описания взаимодействия тел, на случай любого количества совместных радиальных взаимодействий. Общее уравнение такого взаимодействия получим на примере объединения двух рассмотренных выше взаимодействий интересном тем, что данному объединенному взаимодействию соответствует модель системы тел, обладающей способностью, как к сжатию, так и расширению, наличием столкновений длины свободного пробега тел, а так же способностью удержания в системе тел, оказавшихся на её границе.

Вначале, рассмотрим упомянутый пример, для чего представим правую часть уравнения (11) для $j = 1$ и $i = 2$, включив в неё выражение для ускорений свободного падения тел и опустив двойные индексы при величинах, не меняющихся от их перестановки.

$$\ddot{R} = \frac{C}{R^3} - \frac{1}{R^2} \cdot \left(g_2^0 + g_1^0\right) - \frac{K \cdot G \cdot q_1 \cdot q_2}{R^2} \cdot \left(\frac{1}{g_2^0} + \frac{1}{g_1^0}\right)$$

Для совокупности постоянных введём общее обозначение

$$D = -\left(g_2^0 + g_1^0\right) - K \cdot G \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \left(\frac{1}{g_2^0} + \frac{1}{g_1^0}\right)$$

Получим

$$R^3 \ddot{R} - DR = C. \tag{14}$$

Уравнение (14) может быть названо уравнением радиального взаимодействия двух тел. Из физического смысла, очевидно, что R не может принимать нулевого значения. Из $D = 0$ следует, что может существовать взаимное положение взаимодействующих тел, при наличии которого их взаимодействие либо не проявляется, либо проявляется как внутреннее или внешнее отражение, как преодоление некоего барьера, выражающегося в том, что ускорение меняет направление, в том числе при колебаниях около этого положения. Величина C является константой, в случае движения в отсутствие трансверсального ускорения, то есть в отсутствие соответствующего влияния на движение третьих тел. Возможность опустить двойные индексы проистекает из симметрии, смысл которой, образно говоря, в том, что всё равно «Земля вращается вокруг звёзд, или звёзды вокруг Земли», Коперник и Птолемей оба правы, дело лишь в удобстве описания, с той или иной позиции наблюдателя, которое исчезает при переходе к более глубокому рассмотрению вопросов взаимодействия тел.

Обратимся к некоторым элементарным, но полезным, соотношениям взаимодействия. Из рис. 1 ясно, что, если $g_1 = g_2^0 \cdot F(R)$ и $g_2 = g_1^0 \cdot F(R)$, где g_1 и g_2 противоположно направленные взаимные радиальные ускорения тел, а g_1^0 и g_2^0 константы, то к моменту времени T скорости тел образуют, если прямая соединяющая центры тел не вращается, отношение $V_{12}/V_{21} = \int\limits_0^\tau g_2^0 \cdot F(R) d\tau \Big/ \int\limits_0^\tau g_1^0 \cdot F(R) d\tau = g_2^0 \int\limits_0^\tau F(R) d\tau / g_1^0 \int\limits_0^\tau F(R) d\tau$ или $V_{12}/V_{21} = g_2^0/g_1^0$, что иначе запишется как

$$V_{12} \cdot g_1^0 = V_{21} \cdot g_2^0 \qquad \text{(Аналог закона сохранения количества движения).} \tag{15}$$

Для радиального сжатия или расширения системы тел, при соблюдении того же ограничения характера движения, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \left(V_{ji} \cdot g_j^0 - V_{ij} \cdot g_i^0\right) = 0.$$

Исходя из представления об объективности соотношений явления, выражающейся в их независимости от способа и средств наблюдения, а так же каких-либо систем отсчёта не имеющих отношения к наблюдению, обратим внимание, что при "дальнодействии" время служит средством сравнения происходящего в явлении с объектом не участвующим в явлении. Иначе, посторонним объектом, Постараемся перейти к сопоставлению изменений, составляющих явление, с неким изменением из их же числа. То есть, перейти к наблюдаемому постоянно возрастающему соотношению явления по направлению возрастания или убывания какового соотношения могут быть расположены прочие соотношения присущие этому явлению.

Для чего запишем систему уравнений (5) и (6) в виде:

$$\ddot{T} - T\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right) \tag{16}$$

$$T^2 \dot{\theta} = const \tag{17}$$

Подставим $\dot{\theta} = \frac{const.}{T^2}$ в первое уравнение и получим:

$$\ddot{T} = \frac{const.^2}{T^3} - \frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right) \tag{18}$$

Преобразуем:

$$\ddot{T} = \frac{\mathrm{d}}{dt}\left(\frac{dT}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{d^2T}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dT}{d\theta}\frac{d^2\theta}{d\theta dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2T}{d\theta^2}\dot{\theta}^2 \tag{19}$$

так как $\frac{d^2\theta}{d\theta dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right) = 0$.

Получим:

$$\frac{d^2T}{d\theta^2}\dot{\theta}^2 = T\dot{\theta}^2 - \frac{1}{T^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right) \quad \text{или} \quad \frac{d^2T}{d\theta^2} = T - \frac{1}{T^2\dot{\theta}^2}\left(q_2^0 + q_1^0\right), \tag{20}$$

и используя, что $T^2\dot{\theta} = const.$,

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} = T - T^2\frac{\left(q_2^0 + q_1^0\right)}{const.^2}, \tag{21}$$

а введя $\mathrm{K} = \frac{\left(q_2^0 + q_1^0\right)}{const.^2}$,

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} = T - T^2K \tag{22}$$

В окончательном виде удобнее записать

$$T'' + K\cdot T^2 - T = 0\,. \tag{23}$$

Эта запись для "дальнодействия". При "близкодействии"левая "кинематическая" часть уравнений (16) и (18) будет иметь одно время t (отвечающее моментальному соотношению величин, входящих в уравнения), а правая часть уравнения (16) другое "релятивисткое" время t' (отвечающее тому же моментальному соотношению величин, входящих в уравнения). Воспользуемся заимствованным из работы [7. стр. 53] выражением

$$t' = \Gamma(t - \frac{\mathbf{r}V}{\mathbf{C}^2}), \tag{24}$$

где $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{V}^2}{\mathbf{C}^2}}}$ и, в свою очередь, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}$ скалярное произведение мгновенных значений расстояния между телами и относительной скорости тел по отношению друг к другу, а C скорость света. Принимая во внимание, что в использованных выше обозначениях заимствованное выражение примет вид:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}(t - T\dot{T}) \quad \text{или} \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{T}^2}}\left[t - \frac{d}{dt}\left(\frac{T^2}{2}\right)\right] \tag{25}$$

Сведя полученные выражения к одному уравнению, для дальнодействия получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t) + \frac{1}{\left[T\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left\{\frac{d}{dt}[T(t)]\right\}^2}}\cdot\left[t - \frac{d}{dt}\left(\frac{[T(t)]^2}{2}\right)\right]\right\}\right]^2}\cdot\left(q_2^0 + q_1^0\right) - \frac{const.^2}{[T(t)]^3} = 0\,. \tag{26}$$

Примечательно, что при $\dot{T} \to \theta$ может иметь место не пренебрежимое $\frac{d}{dt}\left(\frac{T^2}{2}\right)$, иначе имеет место соответствующий рост T такой, что $T\cdot\dot{T}$ не становится ничтожно малым, т.е. медленно движущиеся тела взаимодействуют на астрономическом расстоянии согласно

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t) + \frac{1}{\left\{T\left[t - \frac{d}{dt}\left(\frac{[T(t)]^2}{2}\right)\right]\right\}^2}\cdot\left(q_2^0 + q_1^0\right) - \frac{const.^2}{[T(t)]^3} = 0\,. \tag{27}$$

При стремлении T к бесконечности третий член левой части уравнения становится пренебрежимым, уравнение приобретает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t)+\frac{1}{\left\{T\left[t-\frac{d}{dt}\left(\frac{[T(t)]^2}{2}\right)\right]\right\}^2}\cdot\left(q_2^0+q_1^0\right)=0\,. \tag{28}$$

А в целом очевидно, что при "дальнодействии" время играет роль "внешней" шкалы отсчёта не взаимодействующей с наблюдаемыми величинами явления и потому исключается из модели, а вот при "близкодействии" время становится внутренним, входящим в соотношения между частями явления и потому неисключимым из модели, т.е. "собственным", хотя и измеримым с помощью любой "внешней" шкалы.

Библиографический список

1. Герц, Г. Принципы механики, изложенные в новой связи [Текст] / Г. Герц. – М., 1959. – 386 с.
2. Ландау, Л. Б., Лифшиц, Е. М. Краткий курс теоретической физики. Книга 1 [Текст] / Л. Б. Ландау, Е. М. Лифшиц // Механика и электродинамика. – М. : «НАУКА», 1969. – 271 с.
3. Лойцянский, Л. Г., Лурье, А. И. Курс теоретической механики Т. 1–2 [Текст] / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М. : «ДРОФА», 2006.
4. Синг, Дж. Л. Классическая динамика [Текст] / Дж. Л. Синг. – М. : Физматгиз, 1963 г. – 448 с.
5. Voss A., Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Encyklopädie der matematischen Wissenschaften, т. ιv, стр. 3-121. Leipzig,1901-1908.
6. А.Г. Штерн, П.Г. Штерн Построение математической модели физического явления без введения ненаблюдаемых непосредственно величин [Текст] /Ярославский педагогический вестник – 2012 – №1 – Том III (Естественные науки)
7. Уваров В.А. Специальная теория относительности [Текст] / Изд-во “Наука”, Главн. ред. Физ.- мат. лит., 1969г., 304 с