

# Una Nueva Teoría en Mecánica Relacional

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires, Argentina

( TRABAJO I )

En mecánica relacional, una nueva teoría es presentada, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias. Adicionalmente, en este trabajo, todas las fuerzas deben obedecer siempre la tercera ley de Newton.

## Introducción

La nueva teoría, que este trabajo presenta en mecánica relacional, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado Universo) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas universales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición universal  $\mathbf{r}_i$ , velocidad universal  $\mathbf{v}_i$  y aceleración universal  $\mathbf{a}_i$  de una partícula  $i$ , están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

(  $\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$  ) y (  $\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$  ) donde  $\vec{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ ,  $\vec{R}$  es el vector de posición del centro de masa del Universo y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular del Universo (ver Anexo I)

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del Universo respecto a S es igual a cero y S es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del Universo respecto a S es igual a cero.

## Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza neta  $\mathbf{F}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$  produce una aceleración universal  $\mathbf{a}_i$ , según la siguiente ecuación:  $[\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i]$

[3] En este trabajo, todas las fuerzas deben obedecer siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

## Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$M \doteq \sum_i^N m_i$
Posición CM 1	$\vec{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$
Velocidad CM 1	$\vec{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$
Aceleración CM 1	$\vec{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$
Posición CM 2	$\mathbf{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i$
Velocidad CM 2	$\mathbf{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Aceleración CM 2	$\mathbf{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i$
Momento Lineal 1	$\mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Momento Angular 1	$\mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$
Momento Angular 2	$\mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})]$
Trabajo 1	$W_1 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta K_1$
Energía Cinética 1	$\Delta K_1 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i)^2$
Energía Potencial 1	$\Delta U_1 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 1	$E_1 \doteq K_1 + U_1$
Lagrangiano 1	$L_1 \doteq K_1 - U_1$
Trabajo 2	$W_2 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_2$
Energía Cinética 2	$\Delta K_2 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$
Energía Potencial 2	$\Delta U_2 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 2	$E_2 \doteq K_2 + U_2$
Lagrangiano 2	$L_2 \doteq K_2 - U_2$

Trabajo 3	$W_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \Delta K_3$
Energía Cinética 3	$\Delta K_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Potencial 3	$\Delta U_3 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 3	$E_3 \doteq K_3 + U_3$
Trabajo 4	$W_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_4$
Energía Cinética 4	$\Delta K_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]$
Energía Potencial 4	$\Delta U_4 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 4	$E_4 \doteq K_4 + U_4$
Trabajo 5	$W_5 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})] = \Delta K_5$
Energía Cinética 5	$\Delta K_5 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Potencial 5	$\Delta U_5 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Mecánica 5	$E_5 \doteq K_5 + U_5$
Trabajo 6	$W_6 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] = \Delta K_6$
Energía Cinética 6	$\Delta K_6 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Potencial 6	$\Delta U_6 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Mecánica 6	$E_6 \doteq K_6 + U_6$

## Relaciones

En un sistema de partículas, entre las energías cinéticas, las energías potenciales y las energías mecánicas, se dan siempre estas relaciones (ver Anexo II)

$$K_1 = K_2 + 1/2 M \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$K_3 = K_4 + 1/2 M \mathbf{A}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}$$

$$K_5 = K_6 + 1/2 M [(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2 + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R})]$$

$$K_5 = K_1 + K_3 \quad \& \quad U_5 = U_1 + U_3 \quad \& \quad E_5 = E_1 + E_3$$

$$K_6 = K_2 + K_4 \quad \& \quad U_6 = U_2 + U_4 \quad \& \quad E_6 = E_2 + E_4$$

# Principios

El momento lineal  $[\mathbf{P}_1]$  de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{P}_1)/dt = \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_i^N \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular  $[\mathbf{L}_1]$  de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_1)/dt = \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular  $[\mathbf{L}_2]$  de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_2)/dt = \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm})] = \right. \\ \left. \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i = 0 \right] \end{aligned}$$

Las energías mecánicas  $[\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2]$  de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$\mathbf{E}_1 = \text{constante} \quad \left[ \Delta \mathbf{E}_1 = \Delta \mathbf{K}_1 + \Delta \mathbf{U}_1 = 0 \right]$$

$$\mathbf{E}_2 = \text{constante} \quad \left[ \Delta \mathbf{E}_2 = \Delta \mathbf{K}_2 + \Delta \mathbf{U}_2 = 0 \right]$$

Las energías mecánicas  $[\mathbf{E}_3$  y  $\mathbf{E}_4]$  de un sistema de N partículas son siempre iguales a cero, por lo tanto, permanecen siempre constantes.

$$\mathbf{E}_3 = \text{constante} \quad \left[ \mathbf{E}_3 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i] = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_4 = \text{constante} \quad \left[ \mathbf{E}_4 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) - \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = 0 \right] \\ \sum_i^N 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \sum_i^N 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \end{aligned}$$

Las energías mecánicas  $[\mathbf{E}_5$  y  $\mathbf{E}_6]$  de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$\mathbf{E}_5 = \text{constante} \quad \left[ \Delta \mathbf{E}_5 = \Delta \mathbf{K}_5 + \Delta \mathbf{U}_5 = 0 \right]$$

$$\mathbf{E}_6 = \text{constante} \quad \left[ \Delta \mathbf{E}_6 = \Delta \mathbf{K}_6 + \Delta \mathbf{U}_6 = 0 \right]$$

## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ .

En este trabajo, las magnitudes  $[m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, M, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, W_1, K_1, U_1, E_1, L_1, W_2, K_2, U_2, E_2, L_2, W_3, K_3, U_3, E_3, W_4, K_4, U_4, E_4, W_5, K_5, U_5, E_5, W_6, K_6, U_6 \text{ y } E_6]$  son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica  $E_3$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_3 = K_3 + U_3 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_5$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_1$  del sistema de partículas  $[E_5 = E_1]$

La energía mecánica  $E_4$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_4 = K_4 + U_4 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_6$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_2$  del sistema de partículas  $[E_6 = E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_3$  y la energía potencial  $U_5$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_3 = (\frac{k}{2}) U_1]$  y  $[U_5 = (1 + \frac{k}{2}) U_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_4$  y la energía potencial  $U_6$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_4 = (\frac{k}{2}) U_2]$  y  $[U_6 = (1 + \frac{k}{2}) U_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_5$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_1 = -K_3 = U_3 = (\frac{k}{2}) U_1 = (\frac{k}{2+k}) E_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_6$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_2 = -K_4 = U_4 = (\frac{k}{2}) U_2 = (\frac{k}{2+k}) E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_1 \rangle = -\langle K_3 \rangle = \langle U_3 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_1 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_1 \rangle]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_2 \rangle = -\langle K_4 \rangle = \langle U_4 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_2 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_2 \rangle]$

El promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  y el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  de un sistema de partículas con desplazamiento acotado son siempre iguales a cero.

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\dot{r}_i \dot{r}_i + \dot{r}_i r_i)$  ] donde  $r_i \doteq |\vec{r}_i - \vec{R}|$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\dot{r}_{ij} \dot{r}_{ij} + \dot{r}_{ij} r_{ij})$  ] donde  $r_{ij} \doteq |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\ddot{r}_i)$  ] donde  $\tau_i \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{R})$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\ddot{r}_{ij})$  ] donde  $\tau_{ij} \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{r}_j)$

La energía cinética  $K_6$  es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el Universo [tales como:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{R}$ , etc.]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_2$  es igual a la energía potencial  $U_1$  si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [  $U_2 = U_1$  ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_4$  es igual a la energía potencial  $U_3$  si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [  $U_4 = U_3$  ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_6$  es igual a la energía potencial  $U_5$  si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [  $U_6 = U_5$  ]

Un sistema de referencia  $S$  es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del Universo respecto a  $S$  es igual a cero y  $S$  es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del Universo respecto a  $S$  es igual a cero.

Si el origen de un sistema de referencia no rotante [  $\vec{\omega} = 0$  ] coincide siempre con el centro de masa del Universo [  $\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$  ] entonces se logra: [  $\mathbf{r}_i = \vec{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i = \vec{v}_i$  y  $\mathbf{a}_i = \vec{a}_i$  ] Por lo tanto, es posible afirmar que siempre: [  $\mathbf{v}_i = d(\mathbf{r}_i)/dt$  y  $\mathbf{a}_i = d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$  ]

Este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia inercial. La ecuación [  $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$  ] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

En este trabajo, la ecuación [  $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$  ] dejaría de ser válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial si alguna fuerza no obedeciera siempre la tercera ley de Newton en su forma fuerte y/o en su forma débil.

## Bibliografía

- A. Einstein**, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.
- A. Torassa**, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.
- E. Mach**, La Ciencia de la Mecánica.

# Anexo I

## El Universo

El Universo es un sistema que contiene a todas las partículas, que está siempre libre de fuerzas externas y que todas las fuerzas internas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

La posición  $\vec{R}$ , la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del Universo respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la aceleración angular  $\vec{\alpha}$  del Universo respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^{All} m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \vec{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\vec{I} \doteq \sum_i^{All} m_i [|\vec{r}_i - \vec{R}|^2 \vec{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^{All} m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del Universo,  $\vec{I}$  es el tensor de inercia del Universo (respecto a  $\vec{R}$ ) y  $\vec{L}$  es el momento angular del Universo respecto al sistema de referencia S.

## Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2 \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

## Anexo II

### Relaciones

En un sistema de partículas se dan siempre estas relaciones ( Las magnitudes  $\mathbf{R}_{cm}$ ,  $\mathbf{V}_{cm}$ ,  $\mathbf{A}_{cm}$ ,  $\vec{R}_{cm}$ ,  $\vec{V}_{cm}$  y  $\vec{A}_{cm}$  pueden ser reemplazadas por las magnitudes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{V}$  y  $\vec{A}$  o por las magnitudes  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_j$  y  $\vec{a}_j$ , respectivamente. Por otro lado, siempre  $\mathbf{R} = \mathbf{V} = \mathbf{A} = 0$  )

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{R}_{cm} \doteq (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{V}_{cm} \doteq (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - 2(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + 2(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2$$

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \{ (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] -$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) +$$

$$\{ \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) -$$

$$[2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \{ [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) =$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2 - (\vec{\omega})^2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2 + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$



## Anexo III

### Magnitudes

Las magnitudes  $\mathbf{L}_2$ ,  $W_2$ ,  $K_2$ ,  $U_2$ ,  $W_4$ ,  $K_4$ ,  $U_4$ ,  $W_6$ ,  $K_6$  y  $U_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue:

$$\mathbf{L}_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]$$

$$W_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_2 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 = W_2$$

$$\Delta U_2 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$W_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$\Delta K_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] = W_4$$

$$\Delta U_4 = - \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$W_6 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_6 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = W_6$$

$$\Delta U_6 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

Las magnitudes  $W_{(1 \text{ al } 6)}$  y  $U_{(1 \text{ al } 6)}$  de un sistema aislado de  $N$  partículas cuyas fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil se reducen a:

$$W_1 = W_2 = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_3 = W_4 = \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Delta U_3 = \Delta U_4 = - \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$W_5 = W_6 = \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

$$\Delta U_5 = \Delta U_6 = - \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

# Una Nueva Teoría en Mecánica Relacional

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires, Argentina

( TRABAJO II )

En mecánica relacional, una nueva teoría es presentada, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias y que establece la existencia de una nueva fuerza universal de interacción, denominada fuerza cinética.

## Introducción

La nueva teoría, que este trabajo presenta en mecánica relacional, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado Universo) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas universales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición universal  $\mathbf{r}_i$ , velocidad universal  $\mathbf{v}_i$  y aceleración universal  $\mathbf{a}_i$  de una partícula  $i$ , están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

(  $\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$  ) y (  $\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$  ) donde  $\vec{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ ,  $\vec{R}$  es el vector de posición del centro de masa del Universo y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular del Universo (ver Anexo I)

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del Universo respecto a S es igual a cero y S es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del Universo respecto a S es igual a cero.

## Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza total  $\mathbf{T}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  es siempre igual a cero [  $\mathbf{T}_i = 0$  ]

[3] En este trabajo, todas las fuerzas no cinéticas deben obedecer siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

## Fuerza Cinética

La fuerza cinética  $\mathbf{K}_{ij}$  ejercida sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$  por otra partícula  $j$  de masa  $m_j$ , causada por la interacción entre la partícula  $i$  y la partícula  $j$ , está dada por:

$$\mathbf{K}_{ij} = - m_i m_j M^{-1} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$$

donde  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración universal de la partícula  $i$ ,  $\mathbf{a}_j$  es la aceleración universal de la partícula  $j$  y  $M$  es la masa del Universo.

De la ecuación anterior se deduce que la fuerza cinética neta  $\mathbf{K}_i$  ( $= \sum_j^{All} \mathbf{K}_{ij}$ ) que actúa sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$ , está dada por:

$$\mathbf{K}_i = - m_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm})$$

donde  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración universal de la partícula  $i$  y  $\mathbf{A}_{cm}$  es la aceleración universal del centro de masa del Universo.

Ahora, dado que la aceleración universal del centro de masa del Universo  $\mathbf{A}_{cm}$  es siempre igual a cero entonces de la ecuación anterior finalmente se deduce que la fuerza cinética neta  $\mathbf{K}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$ , está dada por:

$$\mathbf{K}_i = - m_i \mathbf{a}_i$$

donde  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración universal de la partícula  $i$ .

La fuerza cinética  $\mathbf{K}$  es considerada en la nueva dinámica, principalmente en el [2] principio, como una nueva fuerza universal de interacción.

Por último, la fuerza cinética  $\mathbf{K}$  obedece siempre la tercera ley de Newton en su forma débil.

## [2] Principio

El [2] principio de la nueva dinámica establece que la fuerza total  $\mathbf{T}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  es siempre igual a cero.

$$\mathbf{T}_i = 0$$

Si la fuerza total  $\mathbf{T}_i$  es dividida en las siguientes dos partes: la fuerza cinética neta  $\mathbf{K}_i$  y la fuerza no cinética neta  $\mathbf{F}_i$  ( $\sum$  de fuerzas gravitatorias, fuerzas electrostáticas, etc.) entonces:

$$\mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i = 0$$

Ahora, sustituyendo ( $\mathbf{K}_i = - m_i \mathbf{a}_i$ ) y reordenando, finalmente se obtiene:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Esta ecuación (similar a la segunda ley de Newton) será usada a lo largo de este trabajo.

Por otro lado, en este trabajo un sistema de partículas es aislado cuando el sistema está libre de fuerzas no cinéticas externas.

## Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$M \doteq \sum_i^N m_i$
Posición CM 1	$\vec{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$
Velocidad CM 1	$\vec{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$
Aceleración CM 1	$\vec{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$
Posición CM 2	$\mathbf{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i$
Velocidad CM 2	$\mathbf{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Aceleración CM 2	$\mathbf{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i$
Momento Lineal 1	$\mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Momento Angular 1	$\mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$
Momento Angular 2	$\mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})]$
Trabajo 1	$W_1 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta K_1$
Energía Cinética 1	$\Delta K_1 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i)^2$
Energía Potencial 1	$\Delta U_1 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 1	$E_1 \doteq K_1 + U_1$
Lagrangiano 1	$L_1 \doteq K_1 - U_1$
Trabajo 2	$W_2 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_2$
Energía Cinética 2	$\Delta K_2 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$
Energía Potencial 2	$\Delta U_2 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 2	$E_2 \doteq K_2 + U_2$
Lagrangiano 2	$L_2 \doteq K_2 - U_2$

Trabajo 3	$W_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \Delta K_3$
Energía Cinética 3	$\Delta K_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Potencial 3	$\Delta U_3 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 3	$E_3 \doteq K_3 + U_3$
Trabajo 4	$W_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_4$
Energía Cinética 4	$\Delta K_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]$
Energía Potencial 4	$\Delta U_4 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 4	$E_4 \doteq K_4 + U_4$
Trabajo 5	$W_5 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})] = \Delta K_5$
Energía Cinética 5	$\Delta K_5 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Potencial 5	$\Delta U_5 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Mecánica 5	$E_5 \doteq K_5 + U_5$
Trabajo 6	$W_6 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] = \Delta K_6$
Energía Cinética 6	$\Delta K_6 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Potencial 6	$\Delta U_6 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Mecánica 6	$E_6 \doteq K_6 + U_6$

## Relaciones

En un sistema de partículas, entre las energías cinéticas, las energías potenciales y las energías mecánicas, se dan siempre estas relaciones (ver Anexo II)

$$K_1 = K_2 + 1/2 M \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$K_3 = K_4 + 1/2 M \mathbf{A}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}$$

$$K_5 = K_6 + 1/2 M [(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2 + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R})]$$

$$K_5 = K_1 + K_3 \quad \& \quad U_5 = U_1 + U_3 \quad \& \quad E_5 = E_1 + E_3$$

$$K_6 = K_2 + K_4 \quad \& \quad U_6 = U_2 + U_4 \quad \& \quad E_6 = E_2 + E_4$$

# Principios

El momento lineal [ $\mathbf{P}_1$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{P}_1)/dt = \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_i^N \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular [ $\mathbf{L}_1$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_1)/dt = \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular [ $\mathbf{L}_2$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_2)/dt = \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm})] = \right. \\ \left. \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i = 0 \right] \end{aligned}$$

Las energías mecánicas [ $E_1$  y  $E_2$ ] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas cinéticas y a fuerzas no cinéticas conservativas.

$$E_1 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_1 = \Delta K_1 + \Delta U_1 = 0 \right]$$

$$E_2 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_2 = \Delta K_2 + \Delta U_2 = 0 \right]$$

Las energías mecánicas [ $E_3$  y  $E_4$ ] de un sistema de N partículas son siempre iguales a cero, por lo tanto, permanecen siempre constantes.

$$E_3 = \text{constante} \quad \left[ E_3 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i] = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} E_4 = \text{constante} \quad \left[ E_4 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) - \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = 0 \right] \\ \sum_i^N 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \sum_i^N 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \end{aligned}$$

Las energías mecánicas [ $E_5$  y  $E_6$ ] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas cinéticas y a fuerzas no cinéticas conservativas.

$$E_5 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_5 = \Delta K_5 + \Delta U_5 = 0 \right]$$

$$E_6 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_6 = \Delta K_6 + \Delta U_6 = 0 \right]$$

## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ .

En este trabajo, las magnitudes  $[m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, M, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{T}, \mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, W_1, K_1, U_1, E_1, L_1, W_2, K_2, U_2, E_2, L_2, W_3, K_3, U_3, E_3, W_4, K_4, U_4, E_4, W_5, K_5, U_5, E_5, W_6, K_6, U_6 \text{ y } E_6]$  son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica  $E_3$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_3 = K_3 + U_3 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_5$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_1$  del sistema de partículas  $[E_5 = E_1]$

La energía mecánica  $E_4$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_4 = K_4 + U_4 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_6$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_2$  del sistema de partículas  $[E_6 = E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_3$  y la energía potencial  $U_5$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_3 = (\frac{k}{2}) U_1]$  y  $[U_5 = (1 + \frac{k}{2}) U_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_4$  y la energía potencial  $U_6$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_4 = (\frac{k}{2}) U_2]$  y  $[U_6 = (1 + \frac{k}{2}) U_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_5$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_1 = -K_3 = U_3 = (\frac{k}{2}) U_1 = (\frac{k}{2+k}) E_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_6$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_2 = -K_4 = U_4 = (\frac{k}{2}) U_2 = (\frac{k}{2+k}) E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_1 \rangle = -\langle K_3 \rangle = \langle U_3 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_1 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_1 \rangle]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_2 \rangle = -\langle K_4 \rangle = \langle U_4 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_2 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_2 \rangle]$

El promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  y el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  de un sistema de partículas con desplazamiento acotado son siempre iguales a cero.

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\dot{r}_i \dot{r}_i + \dot{r}_i r_i)$  ] donde  $r_i \doteq |\vec{r}_i - \vec{R}|$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\dot{r}_{ij} \dot{r}_{ij} + \dot{r}_{ij} r_{ij})$  ] donde  $r_{ij} \doteq |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\ddot{r}_i)$  ] donde  $\tau_i \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{R})$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\ddot{r}_{ij})$  ] donde  $\tau_{ij} \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{r}_j)$

La energía cinética  $K_6$  es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el Universo [tales como:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{R}$ , etc.]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_2$  es igual a la energía potencial  $U_1$  si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [ $U_2 = U_1$ ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_4$  es igual a la energía potencial  $U_3$  si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [ $U_4 = U_3$ ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_6$  es igual a la energía potencial  $U_5$  si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [ $U_6 = U_5$ ]

Un sistema de referencia  $S$  es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del Universo respecto a  $S$  es igual a cero y  $S$  es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del Universo respecto a  $S$  es igual a cero.

Si el origen de un sistema de referencia no rotante [ $\vec{\omega} = 0$ ] coincide siempre con el centro de masa del Universo [ $\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$ ] entonces se logra: [ $\mathbf{r}_i = \vec{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i = \vec{v}_i$  y  $\mathbf{a}_i = \vec{a}_i$ ] Por lo tanto, es posible afirmar que siempre: [ $\mathbf{v}_i = d(\mathbf{r}_i)/dt$  y  $\mathbf{a}_i = d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$ ]

Sin considerar a las fuerzas cinéticas, este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia inercial. La ecuación [ $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ ] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

En este trabajo, la ecuación [ $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ ] dejaría de ser válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial si alguna fuerza no cinética no obedeciera siempre la tercera ley de Newton en su forma fuerte y/o en su forma débil.

## Bibliografía

- A. Einstein**, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.
- A. Torassa**, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.
- E. Mach**, La Ciencia de la Mecánica.



# Anexo I

## El Universo

El Universo es un sistema que contiene a todas las partículas, que está siempre libre de fuerzas no cinéticas externas y que todas las fuerzas no cinéticas internas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y en su forma fuerte.

La posición  $\vec{R}$ , la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del Universo respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la aceleración angular  $\vec{\alpha}$  del Universo respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^{All} m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^{All} m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \vec{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\vec{I} \doteq \sum_i^{All} m_i [|\vec{r}_i - \vec{R}|^2 \vec{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^{All} m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del Universo,  $\vec{I}$  es el tensor de inercia del Universo (respecto a  $\vec{R}$ ) y  $\vec{L}$  es el momento angular del Universo respecto al sistema de referencia S.

## Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2 \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

## Anexo II

### Relaciones

En un sistema de partículas se dan siempre estas relaciones ( Las magnitudes  $\mathbf{R}_{cm}$ ,  $\mathbf{V}_{cm}$ ,  $\mathbf{A}_{cm}$ ,  $\vec{R}_{cm}$ ,  $\vec{V}_{cm}$  y  $\vec{A}_{cm}$  pueden ser reemplazadas por las magnitudes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{V}$  y  $\vec{A}$  o por las magnitudes  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_j$  y  $\vec{a}_j$ , respectivamente. Por otro lado, siempre  $\mathbf{R} = \mathbf{V} = \mathbf{A} = 0$  )

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{R}_{cm} \doteq (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{V}_{cm} \doteq (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - 2(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + 2(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2$$

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \{(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] -$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) +$$

$$\{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) -$$

$$[2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \{[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) =$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2 - (\vec{\omega})^2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2 + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

## Anexo III

### Magnitudes

Las magnitudes  $\mathbf{L}_2$ ,  $W_2$ ,  $K_2$ ,  $U_2$ ,  $W_4$ ,  $K_4$ ,  $U_4$ ,  $W_6$ ,  $K_6$  y  $U_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue:

$$\mathbf{L}_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]$$

$$W_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_2 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 = W_2$$

$$\Delta U_2 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$W_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$\Delta K_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] = W_4$$

$$\Delta U_4 = - \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$W_6 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_6 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = W_6$$

$$\Delta U_6 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

Las magnitudes  $W_{(1 \text{ al } 6)}$  y  $U_{(1 \text{ al } 6)}$  de un sistema aislado de  $N$  partículas cuyas fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil se reducen a:

$$W_1 = W_2 = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_3 = W_4 = \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Delta U_3 = \Delta U_4 = - \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$W_5 = W_6 = \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

$$\Delta U_5 = \Delta U_6 = - \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

# Una Nueva Teoría en Mecánica Relacional

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires, Argentina

( TRABAJO III )

En mecánica relacional, una nueva teoría es presentada, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias. Adicionalmente, en este trabajo, todas las fuerzas pueden obedecer o desobedecer la tercera ley de Newton.

## Introducción

La nueva teoría, que este trabajo presenta en mecánica relacional, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado free-system) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas inerciales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición inercial  $\mathbf{r}_i$ , la velocidad inercial  $\mathbf{v}_i$  y la aceleración inercial  $\mathbf{a}_i$  de una partícula  $i$ , están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

(  $\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$  ) y (  $\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$  ) donde  $\vec{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ ,  $\vec{R}$  es el vector de posición del centro de masa del free-system y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del free-system respecto a S es igual a cero y S es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

## Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza neta  $\mathbf{F}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$  produce una aceleración inercial  $\mathbf{a}_i$ , según la siguiente ecuación:  $[\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i]$

[3] En este trabajo, todas las fuerzas pueden obedecer o desobedecer la tercera ley de Newton en su forma débil y/o en su forma fuerte.

## Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$M \doteq \sum_i^N m_i$
Posición CM 1	$\vec{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$
Velocidad CM 1	$\vec{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$
Aceleración CM 1	$\vec{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$
Posición CM 2	$\mathbf{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i$
Velocidad CM 2	$\mathbf{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Aceleración CM 2	$\mathbf{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i$
Momento Lineal 1	$\mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Momento Angular 1	$\mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$
Momento Angular 2	$\mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})]$
Trabajo 1	$W_1 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta K_1$
Energía Cinética 1	$\Delta K_1 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i)^2$
Energía Potencial 1	$\Delta U_1 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 1	$E_1 \doteq K_1 + U_1$
Lagrangiano 1	$L_1 \doteq K_1 - U_1$
Trabajo 2	$W_2 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_2$
Energía Cinética 2	$\Delta K_2 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$
Energía Potencial 2	$\Delta U_2 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 2	$E_2 \doteq K_2 + U_2$
Lagrangiano 2	$L_2 \doteq K_2 - U_2$

Trabajo 3	$W_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \Delta K_3$
Energía Cinética 3	$\Delta K_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Potencial 3	$\Delta U_3 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 3	$E_3 \doteq K_3 + U_3$
Trabajo 4	$W_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_4$
Energía Cinética 4	$\Delta K_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]$
Energía Potencial 4	$\Delta U_4 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 4	$E_4 \doteq K_4 + U_4$
Trabajo 5	$W_5 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})] = \Delta K_5$
Energía Cinética 5	$\Delta K_5 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Potencial 5	$\Delta U_5 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Mecánica 5	$E_5 \doteq K_5 + U_5$
Trabajo 6	$W_6 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] = \Delta K_6$
Energía Cinética 6	$\Delta K_6 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Potencial 6	$\Delta U_6 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Mecánica 6	$E_6 \doteq K_6 + U_6$

## Relaciones

En un sistema de partículas, entre las energías cinéticas, las energías potenciales y las energías mecánicas, se dan siempre estas relaciones (ver Anexo II)

$$K_1 = K_2 + 1/2 M \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$K_3 = K_4 + 1/2 M \mathbf{A}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}$$

$$K_5 = K_6 + 1/2 M [(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2 + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R})]$$

$$K_5 = K_1 + K_3 \quad \& \quad U_5 = U_1 + U_3 \quad \& \quad E_5 = E_1 + E_3$$

$$K_6 = K_2 + K_4 \quad \& \quad U_6 = U_2 + U_4 \quad \& \quad E_6 = E_2 + E_4$$

## Principios

El momento lineal [ $\mathbf{P}_1$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{P}_1)/dt = \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_i^N \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular [ $\mathbf{L}_1$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_1)/dt = \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular [ $\mathbf{L}_2$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 = \text{constante} \quad & \left[ d(\mathbf{L}_2)/dt = \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm})] = \right. \\ & \left. \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i = 0 \right] \end{aligned}$$

Las energías mecánicas [ $E_1$  y  $E_2$ ] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$E_1 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_1 = \Delta K_1 + \Delta U_1 = 0 \right]$$

$$E_2 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_2 = \Delta K_2 + \Delta U_2 = 0 \right]$$

Las energías mecánicas [ $E_3$  y  $E_4$ ] de un sistema de N partículas son siempre iguales a cero, por lo tanto, permanecen siempre constantes.

$$E_3 = \text{constante} \quad \left[ E_3 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i] = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} E_4 = \text{constante} \quad & \left[ E_4 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) - \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = 0 \right] \\ & \sum_i^N 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \sum_i^N 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \end{aligned}$$

Las energías mecánicas [ $E_5$  y  $E_6$ ] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$E_5 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_5 = \Delta K_5 + \Delta U_5 = 0 \right]$$

$$E_6 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_6 = \Delta K_6 + \Delta U_6 = 0 \right]$$



## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ .

En este trabajo, las magnitudes  $[m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, M, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, W_1, K_1, U_1, E_1, L_1, W_2, K_2, U_2, E_2, L_2, W_3, K_3, U_3, E_3, W_4, K_4, U_4, E_4, W_5, K_5, U_5, E_5, W_6, K_6, U_6 \text{ y } E_6]$  son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica  $E_3$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_3 = K_3 + U_3 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_5$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_1$  del sistema de partículas  $[E_5 = E_1]$

La energía mecánica  $E_4$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_4 = K_4 + U_4 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_6$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_2$  del sistema de partículas  $[E_6 = E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_3$  y la energía potencial  $U_5$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_3 = (\frac{k}{2}) U_1]$  y  $[U_5 = (1 + \frac{k}{2}) U_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_4$  y la energía potencial  $U_6$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_4 = (\frac{k}{2}) U_2]$  y  $[U_6 = (1 + \frac{k}{2}) U_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_5$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_1 = -K_3 = U_3 = (\frac{k}{2}) U_1 = (\frac{k}{2+k}) E_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_6$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_2 = -K_4 = U_4 = (\frac{k}{2}) U_2 = (\frac{k}{2+k}) E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_1 \rangle = -\langle K_3 \rangle = \langle U_3 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_1 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_1 \rangle]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_2 \rangle = -\langle K_4 \rangle = \langle U_4 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_2 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_2 \rangle]$

El promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  y el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  de un sistema de partículas con desplazamiento acotado son siempre iguales a cero.

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\dot{r}_i \dot{r}_i + \dot{r}_i r_i)$  ] donde  $r_i \doteq |\vec{r}_i - \vec{R}|$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\dot{r}_{ij} \dot{r}_{ij} + \dot{r}_{ij} r_{ij})$  ] donde  $r_{ij} \doteq |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\ddot{r}_i)$  ] donde  $\tau_i \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{R})$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\ddot{r}_{ij})$  ] donde  $\tau_{ij} \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{r}_j)$

La energía cinética  $K_6$  es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el free-system [ tales como:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{R}$ , etc. ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_2$  es igual a la energía potencial  $U_1$  si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [  $U_2 = U_1$  ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_4$  es igual a la energía potencial  $U_3$  si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [  $U_4 = U_3$  ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_6$  es igual a la energía potencial  $U_5$  si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [  $U_6 = U_5$  ]

Un sistema de referencia  $S$  es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del free-system respecto a  $S$  es igual a cero y  $S$  es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a  $S$  es igual a cero.

Si el origen de un sistema de referencia no rotante [  $\vec{\omega} = 0$  ] coincide siempre con el centro de masa del free-system [  $\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$  ] entonces se logra: [  $\mathbf{r}_i = \vec{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i = \vec{v}_i$  y  $\mathbf{a}_i = \vec{a}_i$  ] Por lo tanto, es posible afirmar que siempre: [  $\mathbf{v}_i = d(\mathbf{r}_i)/dt$  y  $\mathbf{a}_i = d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$  ]

Este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia inercial. La ecuación [  $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$  ] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

En este trabajo, la ecuación [  $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$  ] seguiría siendo válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial incluso si todas las fuerzas desobedecieran siempre la tercera ley de Newton en su forma fuerte y en su forma débil.

## Bibliografía

- A. Einstein**, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.
- A. Torassa**, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.
- E. Mach**, La Ciencia de la Mecánica.

# Anexo I

## Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición  $\vec{R}$ , la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la aceleración angular  $\vec{\alpha}$  del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \vec{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\vec{I} \doteq \sum_i^N m_i [|\vec{r}_i - \vec{R}|^2 \vec{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system,  $\vec{I}$  es el tensor de inercia del free-system (respecto a  $\vec{R}$ ) y  $\vec{L}$  es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

## Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2 \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

## Anexo II

### Relaciones

En un sistema de partículas se dan siempre estas relaciones ( Las magnitudes  $\mathbf{R}_{cm}$ ,  $\mathbf{V}_{cm}$ ,  $\mathbf{A}_{cm}$ ,  $\vec{R}_{cm}$ ,  $\vec{V}_{cm}$  y  $\vec{A}_{cm}$  pueden ser reemplazadas por las magnitudes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{V}$  y  $\vec{A}$  o por las magnitudes  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_j$  y  $\vec{a}_j$ , respectivamente. Por otro lado, siempre  $\mathbf{R} = \mathbf{V} = \mathbf{A} = 0$  )

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{R}_{cm} \doteq (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{V}_{cm} \doteq (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - 2(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + 2(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2$$

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \{(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] -$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) +$$

$$\{\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) -$$

$$[2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \{[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) =$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2 - (\vec{\omega})^2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2 + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

## Anexo III

### Magnitudes

Las magnitudes  $\mathbf{L}_2$ ,  $W_2$ ,  $K_2$ ,  $U_2$ ,  $W_4$ ,  $K_4$ ,  $U_4$ ,  $W_6$ ,  $K_6$  y  $U_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue:

$$\mathbf{L}_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]$$

$$W_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_2 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 = W_2$$

$$\Delta U_2 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$W_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$\Delta K_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] = W_4$$

$$\Delta U_4 = - \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$W_6 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_6 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = W_6$$

$$\Delta U_6 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

Las magnitudes  $W_{(1 \text{ al } 6)}$  y  $U_{(1 \text{ al } 6)}$  de un sistema aislado de  $N$  partículas cuyas fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil se reducen a:

$$W_1 = W_2 = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_3 = W_4 = \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Delta U_3 = \Delta U_4 = - \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$W_5 = W_6 = \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

$$\Delta U_5 = \Delta U_6 = - \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

# Una Nueva Teoría en Mecánica Relacional

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires, Argentina

( TRABAJO IV )

En mecánica relacional, una nueva teoría es presentada, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias y que establece la existencia de nuevas fuerzas universales de interacción, denominadas fuerzas cinéticas.

## Introducción

La nueva teoría, que este trabajo presenta en mecánica relacional, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado free-system) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas inerciales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición inercial  $\mathbf{r}_i$ , la velocidad inercial  $\mathbf{v}_i$  y la aceleración inercial  $\mathbf{a}_i$  de una partícula  $i$ , están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

(  $\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$  ) y (  $\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$  ) donde  $\vec{r}_i$  es el vector de posición de la partícula  $i$ ,  $\vec{R}$  es el vector de posición del centro de masa del free-system y  $\vec{\omega}$  es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del free-system respecto a S es igual a cero y S es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

## Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza total  $\mathbf{T}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  es siempre igual a cero [  $\mathbf{T}_i = 0$  ]

[3] En este trabajo, todas las fuerzas no cinéticas pueden obedecer o desobedecer la tercera ley de Newton en su forma débil y/o en su forma fuerte.

## Fuerzas Cinéticas

La fuerza cinética  $\mathbf{K}_{ij}^a$ , ejercida sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$  por otra partícula  $j$  de masa  $m_j$ , causada por la interacción entre la partícula  $i$  y la partícula  $j$ , está dada por:

$$\mathbf{K}_{ij}^a = - m_i m_j M^{-1} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$$

donde  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración inercial de la partícula  $i$ ,  $\mathbf{a}_j$  es la aceleración inercial de la partícula  $j$  y  $M$  es la masa del Universo.

La fuerza cinética  $\mathbf{K}_i^u$  ejercida sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$  por el centro de masa del Universo, causada por la interacción entre la partícula  $i$  y el Universo, está dada por:

$$\mathbf{K}_i^u = - m_i \mathbf{A}_{cm}$$

donde  $\mathbf{A}_{cm}$  es la aceleración inercial del centro de masa del Universo.

De las ecuaciones anteriores se deduce que la fuerza cinética neta  $\mathbf{K}_i$  ( $= \sum_j^{All} \mathbf{K}_{ij}^a + \mathbf{K}_i^u$ ) que actúa sobre una partícula  $i$  de masa  $m_i$ , está dada por:

$$\mathbf{K}_i = - m_i \mathbf{a}_i$$

donde  $\mathbf{a}_i$  es la aceleración inercial de la partícula  $i$ .

Las fuerzas cinéticas  $\mathbf{K}^a$  y  $\mathbf{K}^u$  obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil.

Si todas las fuerzas no cinéticas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil entonces la aceleración inercial del centro de masa del Universo  $\mathbf{A}_{cm}$  es siempre igual a cero.

## [2] Principio

El [2] principio de la nueva dinámica establece que la fuerza total  $\mathbf{T}_i$  que actúa sobre una partícula  $i$  es siempre igual a cero.

$$\mathbf{T}_i = 0$$

Si la fuerza total  $\mathbf{T}_i$  es dividida en las siguientes dos partes: la fuerza cinética neta  $\mathbf{K}_i$  y la fuerza no cinética neta  $\mathbf{F}_i$  ( $\sum$  de fuerzas gravitatorias, fuerzas electrostáticas, etc.) entonces:

$$\mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i = 0$$

Ahora, sustituyendo ( $\mathbf{K}_i = - m_i \mathbf{a}_i$ ) y reordenando, finalmente se obtiene:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$$

Esta ecuación (similar a la segunda ley de Newton) será usada a lo largo de este trabajo.

Por otro lado, en este trabajo un sistema de partículas es aislado cuando el sistema está libre de fuerzas no cinéticas externas.

## Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$M \doteq \sum_i^N m_i$
Posición CM 1	$\vec{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$
Velocidad CM 1	$\vec{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$
Aceleración CM 1	$\vec{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$
Posición CM 2	$\mathbf{R}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i$
Velocidad CM 2	$\mathbf{V}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Aceleración CM 2	$\mathbf{A}_{cm} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i$
Momento Lineal 1	$\mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$
Momento Angular 1	$\mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$
Momento Angular 2	$\mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})]$
Trabajo 1	$W_1 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta K_1$
Energía Cinética 1	$\Delta K_1 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i)^2$
Energía Potencial 1	$\Delta U_1 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 1	$E_1 \doteq K_1 + U_1$
Lagrangiano 1	$L_1 \doteq K_1 - U_1$
Trabajo 2	$W_2 \doteq \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_2$
Energía Cinética 2	$\Delta K_2 \doteq \sum_i^N \Delta^{1/2} m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$
Energía Potencial 2	$\Delta U_2 \doteq - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 2	$E_2 \doteq K_2 + U_2$
Lagrangiano 2	$L_2 \doteq K_2 - U_2$



Trabajo 3	$W_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \Delta K_3$
Energía Cinética 3	$\Delta K_3 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Potencial 3	$\Delta U_3 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 3	$E_3 \doteq K_3 + U_3$
Trabajo 4	$W_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta K_4$
Energía Cinética 4	$\Delta K_4 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]$
Energía Potencial 4	$\Delta U_4 \doteq - \sum_i^N \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 4	$E_4 \doteq K_4 + U_4$
Trabajo 5	$W_5 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})] = \Delta K_5$
Energía Cinética 5	$\Delta K_5 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Potencial 5	$\Delta U_5 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})]$
Energía Mecánica 5	$E_5 \doteq K_5 + U_5$
Trabajo 6	$W_6 \doteq \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] = \Delta K_6$
Energía Cinética 6	$\Delta K_6 \doteq \sum_i^N \Delta 1/2 m_i [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Potencial 6	$\Delta U_6 \doteq - \sum_i^N [\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta 1/2 \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]$
Energía Mecánica 6	$E_6 \doteq K_6 + U_6$

## Relaciones

En un sistema de partículas, entre las energías cinéticas, las energías potenciales y las energías mecánicas, se dan siempre estas relaciones (ver Anexo II)

$$K_1 = K_2 + 1/2 M \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$K_3 = K_4 + 1/2 M \mathbf{A}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}$$

$$K_5 = K_6 + 1/2 M [(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2 + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R})]$$

$$K_5 = K_1 + K_3 \quad \& \quad U_5 = U_1 + U_3 \quad \& \quad E_5 = E_1 + E_3$$

$$K_6 = K_2 + K_4 \quad \& \quad U_6 = U_2 + U_4 \quad \& \quad E_6 = E_2 + E_4$$

# Principios

El momento lineal [ $\mathbf{P}_1$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{P}_1)/dt = \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_i^N \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular [ $\mathbf{L}_1$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_1)/dt = \sum_i^N m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \right]$$

El momento angular [ $\mathbf{L}_2$ ] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 = \text{constante} \quad \left[ d(\mathbf{L}_2)/dt = \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm})] = \right. \\ \left. \sum_i^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i] = \sum_i^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i = 0 \right] \end{aligned}$$

Las energías mecánicas [ $E_1$  y  $E_2$ ] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas cinéticas y a fuerzas no cinéticas conservativas.

$$E_1 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_1 = \Delta K_1 + \Delta U_1 = 0 \right]$$

$$E_2 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_2 = \Delta K_2 + \Delta U_2 = 0 \right]$$

Las energías mecánicas [ $E_3$  y  $E_4$ ] de un sistema de N partículas son siempre iguales a cero, por lo tanto, permanecen siempre constantes.

$$E_3 = \text{constante} \quad \left[ E_3 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i] = 0 \right]$$

$$\begin{aligned} E_4 = \text{constante} \quad \left[ E_4 = \sum_i^N 1/2 [m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) - \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = 0 \right] \\ \sum_i^N 1/2 m_i [(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \sum_i^N 1/2 m_i \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \end{aligned}$$

Las energías mecánicas [ $E_5$  y  $E_6$ ] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas cinéticas y a fuerzas no cinéticas conservativas.

$$E_5 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_5 = \Delta K_5 + \Delta U_5 = 0 \right]$$

$$E_6 = \text{constante} \quad \left[ \Delta E_6 = \Delta K_6 + \Delta U_6 = 0 \right]$$

## Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre  $\mathbf{F}_i$ .

En este trabajo, las magnitudes  $[m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, M, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{T}, \mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, W_1, K_1, U_1, E_1, L_1, W_2, K_2, U_2, E_2, L_2, W_3, K_3, U_3, E_3, W_4, K_4, U_4, E_4, W_5, K_5, U_5, E_5, W_6, K_6, U_6 \text{ y } E_6]$  son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica  $E_3$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_3 = K_3 + U_3 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_5$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_1$  del sistema de partículas  $[E_5 = E_1]$

La energía mecánica  $E_4$  de un sistema de partículas es siempre igual a cero  $[E_4 = K_4 + U_4 = 0]$

Por lo tanto, la energía mecánica  $E_6$  de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica  $E_2$  del sistema de partículas  $[E_6 = E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_3$  y la energía potencial  $U_5$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_3 = (\frac{k}{2}) U_1]$  y  $[U_5 = (1 + \frac{k}{2}) U_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  entonces la energía potencial  $U_4$  y la energía potencial  $U_6$  del sistema de partículas, están dadas por:  $[U_4 = (\frac{k}{2}) U_2]$  y  $[U_6 = (1 + \frac{k}{2}) U_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_5$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_1 = -K_3 = U_3 = (\frac{k}{2}) U_1 = (\frac{k}{2+k}) E_1]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si la energía cinética  $K_6$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[K_2 = -K_4 = U_4 = (\frac{k}{2}) U_2 = (\frac{k}{2+k}) E_2]$

Si la energía potencial  $U_1$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_1 \rangle = -\langle K_3 \rangle = \langle U_3 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_1 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_1 \rangle]$

Si la energía potencial  $U_2$  de un sistema de partículas es una función homogénea de grado  $k$  y si el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene:  $[\langle K_2 \rangle = -\langle K_4 \rangle = \langle U_4 \rangle = (\frac{k}{2}) \langle U_2 \rangle = (\frac{k}{2+k}) \langle E_2 \rangle]$

El promedio de la energía cinética  $\langle K_5 \rangle$  y el promedio de la energía cinética  $\langle K_6 \rangle$  de un sistema de partículas con desplazamiento acotado son siempre iguales a cero.

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\dot{r}_i \dot{r}_i + \dot{r}_i r_i)$  ] donde  $r_i \doteq |\vec{r}_i - \vec{R}|$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\dot{r}_{ij} \dot{r}_{ij} + \dot{r}_{ij} r_{ij})$  ] donde  $r_{ij} \doteq |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$

La energía cinética  $K_5$  y la energía cinética  $K_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue: [  $K_5 = \sum_i^N 1/2 m_i (\ddot{r}_i)$  ] donde  $\tau_i \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{R})$  y [  $K_6 = \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1}(\ddot{r}_{ij})$  ] donde  $\tau_{ij} \doteq 1/2 (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\ddot{r}_i - \ddot{r}_j)$

La energía cinética  $K_6$  es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el free-system [ tales como:  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{R}$ , etc. ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_2$  es igual a la energía potencial  $U_1$  si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [ $U_2 = U_1$ ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_4$  es igual a la energía potencial  $U_3$  si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [ $U_4 = U_3$ ]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial  $U_6$  es igual a la energía potencial  $U_5$  si las fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [ $U_6 = U_5$ ]

Un sistema de referencia  $S$  es no rotante si la velocidad angular  $\vec{\omega}$  del free-system respecto a  $S$  es igual a cero y  $S$  es además inercial si la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a  $S$  es igual a cero.

Si el origen de un sistema de referencia no rotante [ $\vec{\omega} = 0$ ] coincide siempre con el centro de masa del free-system [ $\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$ ] entonces se logra: [ $\mathbf{r}_i = \vec{r}_i$ ,  $\mathbf{v}_i = \vec{v}_i$  y  $\mathbf{a}_i = \vec{a}_i$ ] Por lo tanto, es posible afirmar que siempre: [ $\mathbf{v}_i = d(\mathbf{r}_i)/dt$  y  $\mathbf{a}_i = d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$ ]

Sin considerar a las fuerzas cinéticas, este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia inercial. La ecuación [ $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ ] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

En este trabajo, la ecuación [ $\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{a}_i$ ] seguiría siendo válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial incluso si todas las fuerzas no cinéticas desobedecieran siempre la tercera ley de Newton en su forma fuerte y en su forma débil.

## Bibliografía

**A. Einstein**, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

**A. Torassa**, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

**E. Mach**, La Ciencia de la Mecánica.

# Anexo I

## Free-System

El free-system es un sistema de  $N$  partículas que está siempre libre de fuerzas no cinéticas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las  $N$  partículas permanecen siempre constantes.

La posición  $\vec{R}$ , la velocidad  $\vec{V}$  y la aceleración  $\vec{A}$  del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia  $S$ , la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y la aceleración angular  $\vec{\alpha}$  del free-system respecto al sistema de referencia  $S$ , están dadas por:

$$M \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\vec{R} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq M^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \vec{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\vec{I} \doteq \sum_i^N m_i [|\vec{r}_i - \vec{R}|^2 \vec{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde  $M$  es la masa del free-system,  $\vec{I}$  es el tensor de inercia del free-system (respecto a  $\vec{R}$ ) y  $\vec{L}$  es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia  $S$ .

## Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2 \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2 \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

## Anexo II

### Relaciones

En un sistema de partículas se dan siempre estas relaciones ( Las magnitudes  $\mathbf{R}_{cm}$ ,  $\mathbf{V}_{cm}$ ,  $\mathbf{A}_{cm}$ ,  $\vec{R}_{cm}$ ,  $\vec{V}_{cm}$  y  $\vec{A}_{cm}$  pueden ser reemplazadas por las magnitudes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{V}$  y  $\vec{A}$  o por las magnitudes  $\mathbf{r}_j$ ,  $\mathbf{v}_j$ ,  $\mathbf{a}_j$ ,  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_j$  y  $\vec{a}_j$ , respectivamente. Por otro lado, siempre  $\mathbf{R} = \mathbf{V} = \mathbf{A} = 0$  )

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{R}_{cm} \doteq (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{V}_{cm} \doteq (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - 2(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + 2(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2$$

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \{ (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) - 2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] -$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) +$$

$$\{ \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) -$$

$$[2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \{ [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) =$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - [2\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})]^2 - (\vec{\omega})^2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2$$

$$\longrightarrow (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2 + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

## Anexo III

### Magnitudes

Las magnitudes  $\mathbf{L}_2$ ,  $W_2$ ,  $K_2$ ,  $U_2$ ,  $W_4$ ,  $K_4$ ,  $U_4$ ,  $W_6$ ,  $K_6$  y  $U_6$  de un sistema de  $N$  partículas pueden ser también expresadas como sigue:

$$\mathbf{L}_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)]$$

$$W_2 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_2 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 = W_2$$

$$\Delta U_2 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right]$$

$$W_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$\Delta K_4 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] = W_4$$

$$\Delta U_4 = - \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]$$

$$W_6 = \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

$$\Delta K_6 = \sum_{j>i}^N \Delta^{1/2} m_i m_j M^{-1} [(\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = W_6$$

$$\Delta U_6 = - \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \left[ \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta^{1/2} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right]$$

Las magnitudes  $W_{(1 \text{ al } 6)}$  y  $U_{(1 \text{ al } 6)}$  de un sistema aislado de  $N$  partículas cuyas fuerzas no cinéticas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil se reducen a:

$$W_1 = W_2 = \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = - \sum_i^N \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_3 = W_4 = \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Delta U_3 = \Delta U_4 = - \sum_i^N \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$W_5 = W_6 = \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$

$$\Delta U_5 = \Delta U_6 = - \sum_i^N \left[ \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta^{1/2} \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \right]$$