

Равномерное дискретное распределение на группе $SO(3)$

Митюшов Е.А., Копытов Н.П.

mityushov-e@mail.ru, nikitako@mail.ru

Уральский государственный университет имени первого Президента России
Б.Н. Ельцина

Аннотация. Дается конструктивное решение задачи о генерации однородных выборок на группе вращений $SO(3)$. Доказывается существование только пяти однородных выборок равномерно распределенных на группе $SO(3)$. Для полученных выборок построены графы, соединяющие элементы группы по кратчайшему маршруту.

Ключевые слова: четырехмерные многогранники, равномерное дискретное распределение, генерация однородных выборок, кратчайший маршрут на $SO(3)$.

Введение

Многие задачи управления движением и навигации, робототехники, вычислительной структурной биологии, астрофизики и компьютерной графики связаны с описанием вращения твердого тела в трехмерном пространстве. Как известно, конфигурационным пространством этого вращения является группа Ли $SO(3)$. Положение твердого тела может быть однозначно определено с помощью кватернионов $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ с единичной нормой $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Они образуют группу $Sp(1)$ ($SO(3) \approx Sp(1)/\pm 1$). При этом трехмерная сфера единичного радиуса S^3 двулиственным образом накрывает группу $SO(3)$ - кватернионам λ_i и $-\lambda_i$ соответствует один и тот же элемент из $SO(3)$ [1,2]. Наглядной иллюстрацией этого служит получение плотности совместного распределения углов Эйлера при равновероятном вращении твердого тела из равномерного распределения точек на поверхности единичной гиперсферы, выполненное в работе [3].

В работе [4] отмечается, что проблема генерации однородных детерминированных выборок на группе вращений $SO(3)$ является одной из фундаментальных и представляется лучшей, по мнению авторов, из известных на сегодняшний день методов для построения детерминированных сеток на $SO(3)$ на основе использования координат Хопфа для группы $SO(3)$.

Так как множество случайных равновероятных вращений может быть представлено множеством точек случайным образом равномерно распределенных на поверхности трехмерной гиперсферы, то возможно перейти к равномерному дискретному распределению точек на гиперсфере, и, как следствие, равномерному дискретному заполнению пространства вращений – ориентационного пространства. Для этого могут быть использованы правильные четырехмерные центросимметричные многогранники. Вершины этих многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса, дадут дискретное равномерное распределение точек на гиперсфере и, соответственно, дискретный набор

ориентаций, соответствующий равномерному заполнению пространства ориентаций.

Упорядочение вершин четырехмерных многогранников открывает путь к построению кратчайшей траектории в виде дуг большого радиуса, соединяющих эти вершины на поверхности единичной гиперсферы.

1. Дискретное распределение точек на гиперсфере в R^4 и дискретные ориентации в R^3

Точный результат решения задачи о равномерном дискретном распределении на группе $SO(3)$ дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Существует только пять равномерных дискретных распределений (пять однородных решеток) на группе $SO(3)$ с четырьмя, восемью, двенадцатью, шестидесятью и трехстами узлами.*

Конструктивное доказательство теоремы 1 заключается в установлении гомеоморфизма множества вершин правильных центросимметричных четырехмерных многогранников и множества узлов однородной решетки на $SO(3)$ (множества равномерных дискретных ориентаций).

Существование равномерного распределения конечного числа точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве доказывается существованием пяти центросимметричных правильных четырехмерных многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса. Этими многогранниками являются: тессеракт (16), шестнадцатичейник (8), двадцатичетырехячейник (24), шестидесятичейник (600), шестисотичейник (120). В скобках указано число вершин.

При этом принимается во внимание факт двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$, связанный с тождественностью кватернионов $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ [1,5], а также свойства симметрии четырехмерных многогранников.

Таким образом, для моделирования дискретного набора ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, могут быть использованы вершины пяти правильных четырехмерных многогранников (тессеракта, шестнадцатичейника, двадцатичетырехячейника, шестидесятичейника, шестисотичейника) в совокупности с процедурой отбрасывания половины вершин по условию тождественности кватернионов $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$.

В качестве примера дискретного заполнения ориентационного пространства выбраны ориентации, соответствующие вершинам двадцатичетырехячейника с координатами $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$, $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ [6]. После отбрасывания зеркально симметричных вершин остаются двенадцать вершин и находятся соответствующие единичные кватернионы:

$$1 - \lambda^{(1)} = (1, 0, 0, 0), \quad 2 - \lambda^{(2)} = (0, 1, 0, 0), \quad 3 - \lambda^{(3)} = (0, 0, 0, 1), \quad 4 - \lambda^{(4)} = (0, 0, 0, 1), \quad 5 - \lambda^{(5)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad 6 - \lambda^{(6)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad 7 - \lambda^{(7)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad 8 - \lambda^{(8)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

$$9 - \lambda^{(9)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad 10 - \lambda^{(10)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad 11 - \lambda^{(11)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad 12 - \lambda^{(12)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

2. Графы, соединяющие элементы группы $SO(3)$ по кратчайшему маршруту

Решение задачи об определении кратчайших маршрутов через узлы однородных решеток на группе $SO(3)$ дается следующей теоремой:

Теорема 2. Для каждого из пяти равномерных дискретных распределений на группе $SO(3)$ существует только один кратчайший маршрут с началом в фиксированном узле соответствующей однородной решетки.

Конструктивное доказательство выполним на примере однородной решетки на $SO(3)$, соответствующей вершинам двадцатичетырехячейника. Рассуждения, приводящие к доказательству теоремы для остальных наборов равномерного дискретного распределения, совершенно аналогичны.

Для упорядочения ориентаций, задаваемых этими кватернионами, определим угловые расстояния (табл. 1), задаваемые равенством

$$\vartheta_{ij} = \arccos(\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)}),$$

где $\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)} = \lambda_0^{(i)} \lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(i)} \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(i)} \lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(i)} \lambda_3^{(j)}$ - скалярное произведение кватернионов.

Таблица 1. Угловые расстояния ϑ_{ij} между дискретными ориентациями.

	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$	$\lambda^{(8)}$	$\lambda^{(9)}$	$\lambda^{(10)}$	$\lambda^{(11)}$	$\lambda^{(12)}$
$\lambda^{(1)}$	0											
$\lambda^{(2)}$	$\pi/2$	0										
$\lambda^{(3)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	0									
$\lambda^{(4)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0								
$\lambda^{(5)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0							
$\lambda^{(6)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0						
$\lambda^{(7)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0					
$\lambda^{(8)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0				
$\lambda^{(9)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	0			
$\lambda^{(10)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0		
$\lambda^{(11)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	
$\lambda^{(12)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0

Из 39 916 800 маршрутов, соединяющих двенадцать выбранных вершин двадцатичетырехячейника, можно отобрать двенадцать кратчайших. Если в

качестве начального узла выбирается узел 1, то кратчайший маршрут задается цепью

$$1 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4.$$

Как видно из таблицы 1, угловое расстояние между вершинами и соответствующими кватернионами в этом случае одинаковое и равно $\pi/3$.

На рис.1 последовательно представлены дискретные ориентации твердого тела, соответствующие значениям кватернионов $\lambda_k = \lambda_k(t_k)$ в узлах t_k сетки $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$.

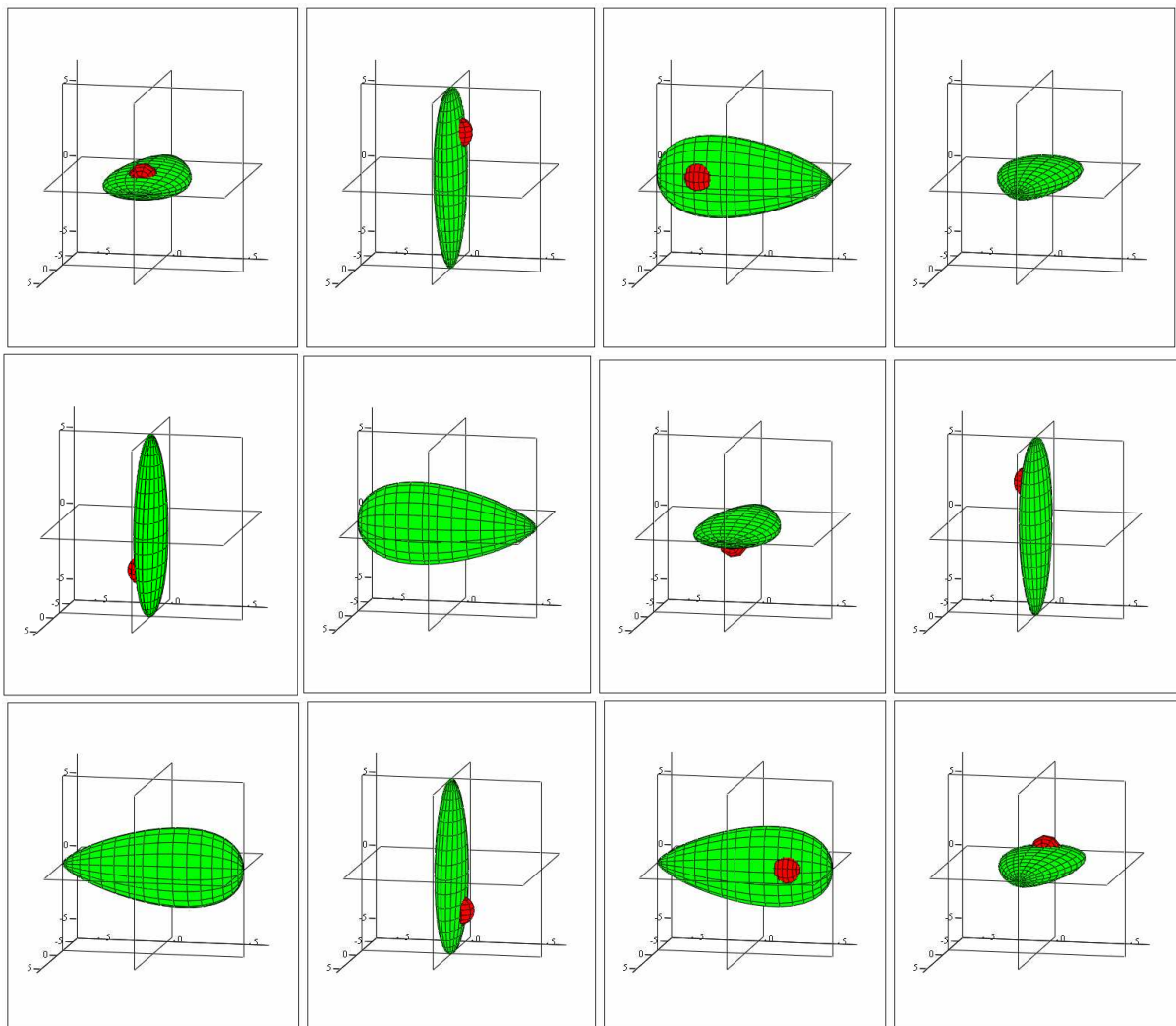


Рис. 1. Двенадцати ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство.

Плавное движение по кратчайшему маршруту через двенадцать узлов равномерной решетки, полученное с использованием метода сферической интерполяции кватернионов [7], иллюстрируется 3D анимацией, выполненной в компьютерной программе Mathcad [8]

Библиография

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 384 с.

2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1.: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей, Изд. 6-е, М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013, 336 с.
3. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: моделирование случайных равновероятных вращений. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015, т. 25, № 1, с. 29-35.
4. Anna Yershova , Steven M. LaValle, Julie C. Mitchell Generating Uniform Incremental Grids on $SO(3)$ Using the Hopf Fibration. <http://msl.cs.uiuc.edu/~lavalle/papers/YerLavMit08.pdf>
5. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 39, 23 с.
6. 24-cell. <https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell>
7. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves. In: Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '85, pp. 245–254. ACM, New York, NY, USA (1985). <http://doi.acm.org/10.1145/325334.325242>
8. 3D анимация плавного движения. The 3D animation of a smooth motion. https://youtu.be/_k00jJIBqWY