

Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – III

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

1-a de aŭgusto, 2008

Resumo

Ĉe special-relativeco ni detale priskribas lum-Doppleran efikon inter restanta lum-fonto kaj observanto kun rektlinia movado kaj konstanta propra akcelo.

In the context of special relativity, we describe with detail the Doppler effect between a light source at rest and an observer in linear motion and constant proper acceleration. To have an English version of this article, ask the authors.

1 Enkonduko

En antaŭaj artikoloj [6, 7, 8, 9] ni pridiskutis Doppleran efikon de lum-signalo inter fonto kaj observanto. Tie aŭ ambaŭ moviĝas aŭ unu moviĝas dum la alia restas. Ofte estas komenca fazo, kiam moviĝanta observanto ricevas signalon eligitan kiam fonto ankoraŭ ne moviĝas. La Doppleran faktoron de tia fazo ni kalkulis en [9], kaj nun ni plu esploras ties grafikaĵojn.

Tia sistemo fariĝas kun observanto komence en loko $[x, y] = [0, 0]$, kaj lum-fonto en $[L, P]$, ambaŭ restantaj. Ĉi tie L estas aŭ pozitiva, aŭ nula aŭ malpozitiva, kaj tute-ĝenerale P estas aŭ pozitiva aŭ nula, laŭ figuro 1. Ekde momento $t = 0$, la observanto moviĝas kun konstanta propra akcelo a , pozitive de akso x , dum la fonto plu restas. Rimarku, ke se $L > 0$, la observanto komence proksimiĝas al la fonto, kaj se $L < 0$ ĝi ĉiam foriĝas de la fonto. Laŭ [9, ekvacio (23)], por $t > 0$ la Dopplera faktoro estas



Figuro 1: Komencaj lokoj de observanto kaj fonto.

$$D(\tau) = \cosh(a\tau/c) + \frac{[1 + l - \cosh(a\tau/c)] \sinh(a\tau/c)}{\sqrt{[1 + l - \cosh(a\tau/c)]^2 + p^2}}, \quad l := aL/c^2, \quad p := aP/c^2, \quad (1)$$

kie τ estas la propra tempo de observanto, elektante $\tau = 0$ kiam $t = 0$.

Sekve ni priskribas tri gravajn aferojn rilatajn al nia studo: tempa dilaton, propran akcelon, kaj Doppleran efikon.

Tempa dilato

Estiĝu inercia referenca sistemo S , t.e., unu normohorloĝo fiksa en ĉiu spaca punkto, ĉiuj sinkronaj. La tempo t mezurata per tiu horloĝaro nomiĝas tempa koordinato. Plu estiĝu moviĝanta normohorloĝo \mathcal{H} , kaj τ ĝia propra tempo.

Supozu, ke kiam \mathcal{H} montras tempon τ_1 , ĝi trapasas horloĝon de S kiu montras tempon t_1 . Poste, kiam \mathcal{H} montras tempon τ_2 , ĝi trapasas alian horloĝon de S , kiu montras tempon t_2 . Laŭ special-relativeco la koordinata intertempo $t_2 - t_1$ mezurata per la horloĝaro de S estas pli granda ol la propra intertempo $\tau_2 - \tau_1$ mezurata per horloĝo \mathcal{H} . Se intertempoj $t_2 - t_1 =: dt$ kaj $\tau_2 - \tau_1 =: d\tau$ estas infitezimaj, do special-relativeco diras, ke $dt = \gamma d\tau$, kie $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, estante v la rapido de \mathcal{H} . Ĉar ĉiam $\gamma \geq 1$, do ĉiam $dt \geq d\tau$, kaj tiu ebla malsameco nomiĝas tempa dilato.

Propra akcelo

Special-relativeco ne permesas, ke objekto havas konstantan Newtonan akcelon $a_N := d^2x/dt^2$ dum tro longa tempo. Fakte, tia objekto atingus rapidon $v := dx/dt$ pli granda ol vakuo-lumo-rapido c , kio ne estas ebla en tiu teorio.

Plej taŭgas al special-relativeco propra akcelo $a := \gamma^3 a_N$. Memoru, ke ju pli granda la rapido des pli granda la faktoro de tempa dilato γ , kaj kiam la rapido proksimiĝas al c , tiam γ emas al ∞ . Rezultas en ĉi tiu studo, ke konstanta propra akcelo a respondas al malkreskanta Newtona akcelo a_N kaj, ke la rapido de objekto kun konstanta propra akcelo dum tre longa tempo apenaŭ emas al vakuo-lumo-rapido c .

Fizike, oni povas difini propran akcelon a de objekto kiel la Newtona akcelo mezurata en inercia referenca sistemo kun momente la sama rapido de objekto. Studoj

de movado kun konstanta a estas oftaj, kiel ĉe Møller [1, paĝo 72], Rindler [2, paĝo 49], Dwayne Hamilton [3], Landau kaj Lifshitz [4, paĝo 22], Cochran [5], kaj ni mem [6, 7, 8, 9].

Dopplera efiko

En propra momento τ_f fonto eligas lum-signalon kun frekvenco ν_f , laŭ siaj propraj mezuriloj. En propra momento τ observanto ricevas tiun lum-signalon kun frekvenco ν , laŭ siaj propraj mezuriloj. Plej ofte $\nu \neq \nu_f$; ĉi tiu ebla ŝanĝo de frekvenco nomiĝas Dopplera efiko, kaj la kvociento $D(\tau) := \nu/\nu_f$ nomiĝas Dopplera faktoro. Se $\nu > \nu_f$, la fenomeno nomiĝas al-violo ($D > 1$); kontraŭe nomiĝas al-ruĝo ($D < 1$).

Laŭ [7, 8, 9], la Doppleran faktoron oni povas kalkuli konsiderante du infinitezime sinsekvajn lum-signalojn. Estiĝu $d\tau_f$ la intertempo de eligo de tiuj du signaloj mezurita per la fonto, kaj estiĝu $d\tau$ la intertempo de ricevo de tiuj du signaloj mezurita per la observanto. Ekvivalente, estiĝu dt_f kaj dt la respondaj intertempoj, mezuritaj per iu inercia referenca sistemo. La Dopplera faktoro je la momento τ de ricevo de signalo estas

$$D(\tau) = \frac{d\tau_f}{d\tau} = \frac{\gamma(t)}{\gamma_f(t_f)} \frac{dt_f}{dt} . \quad (2)$$

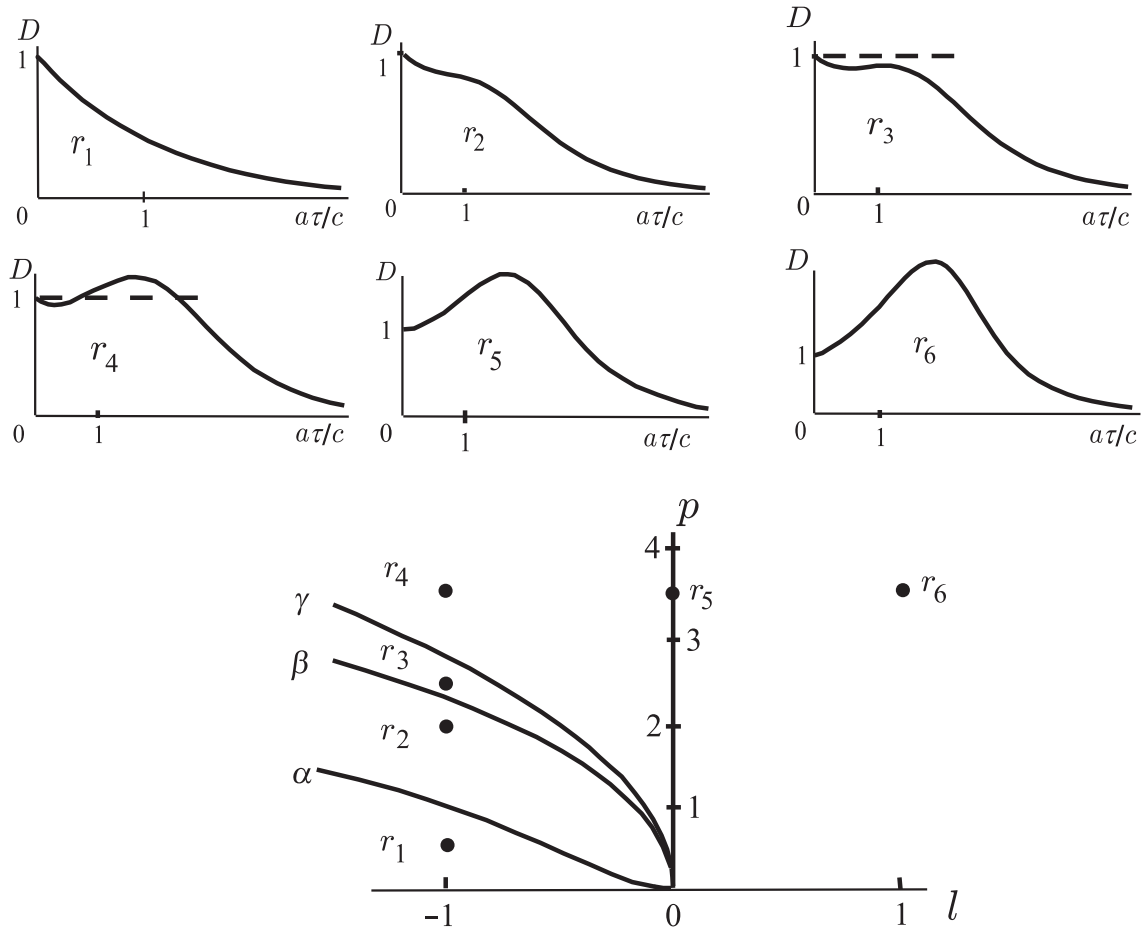
En (2), la faktoro de tempa dilato $\gamma(t)$ pro movado de observanto kontribuas por alviolo, kaj, en la nomanto, la faktoro de tempa dilato $\gamma_f(t_f)$ pro movado de fonto kontribuas por alruĝo. La foriĝ-proksimiĝa faktoro dt_f/dt povas kontribui ambaŭmaniere: dum proksimiĝo ĝi estas pli granda ol 1, do kontribuas por alviolo, kaj dum foriĝo ĝi estas pli eta ol 1, do kontribuas por alruĝo. La Dopplera faktoro (2) estas rezulto de tiuj tri kontribuoj.

En nuna studo la fonto restas, do $\gamma_f(t_f) = 1$, kaj do $D(\tau) = \gamma(t) dt_f/dt$ havas nur du faktorojn. Tio simpligas la diskuton pri ekvacio (2) al la jenaj ĝeneralaĵoj. 1: ĉe proksimiĝo de observanto al fonto, la Dopplera efiko estas alviolo pro ambaŭ faktoroj. 2: ĉe preterpaso, t.e., pozicio $x = L$ de moviĝanta observanto en figuro 1 estante $P \neq 0$, faktoro $dt_f/dt = 1$ ne kontribuas, do $\gamma(t)$ faktoro estras farante alviolon. 3: ĉe foriĝo, aŭ la alruĝa faktoro dt_f/dt aŭ la alviola faktoro $\gamma(t)$ estras, farante plurajn interesajn eblecojn.

Sekcio 2 montras nian plej gravan rezulton, la studon de grafikaĵoj de Dopplera faktoro. Sekcio 3 montras iujn detalojn plu, kaj Sekcio 4 konkludas.

2 Grafikaĵoj

Nun ni studas grafikaĵojn de Dopplera faktoro el ekvacio (1), montratajn en figuro 2. Ĉar en komenca momento $\tau = 0$ la observanto restas, tiam Dopplera efiko ne estas, $D(0) = 1$. Laste, kiam $\tau \rightarrow \infty$, okazas foriĝo, kaj la interspaco de fonto al observanto



Figuro 2: Super estas 6 ecoj de grafikaĵo de Dopplera faktoro D kontraŭ $a\tau/c$, respondaj al ĉiu regiono de la malsupera diagramo. Tiu diagramo montras 6 regionojn, de r_1 ĝis r_6 , laŭ valoroj de $l = aL/c^2$ kaj $p = aP/c^2$, kaj montras kurbojn $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, kiuj limigas tiujn regionojn. Regiono r_5 estas akso $l = 0$. Nigraj buloj (\bullet) montras la valorojn de l kaj p rilatajn al ĉiu grafikaĵo.

estas multe pligranda ol P . Do la movado estas preskaŭ kolinia, kaj do la Dopplera efiko emas al plej forta alruĝo, t.e., la Dopplera faktoro estas $D(\infty) \rightarrow 0$.

La signaloj de $D'(0)$ kaj l estas la sama. Tio estas facile komprenebla. Ja, se $l > 0$ la movado estas komence proksimiĝo, do la Dopplera efiko estas alviolo, kaj se $l < 0$ la movado estas komence foriĝo kun malgranda rapido, do la Dopplera efiko estas alruĝo. Ankaŭ rimarku, ke $D''(0) > 0$, do la unua derivaĵo $D'(\tau)$ pliiĝas je $\tau = 0$.

Nun ni analizas ĉiu grafikaĵo en figuro 2. Estas ses ecoj de grafikaĵo, pendante de valoroj de l kaj p . En tiu figuro, malsupera diagramo $l \times p$ limigas ses regionojn, de r_1 ĝis r_6 , per kurboj $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ĉiu regiono respondas al iu eco de grafikaĵo.

Grafikaĵoj de regiono r_1 estas la plej simplaj: ĉiam $D(\tau) \leq 1$, $D'(\tau) < 0$ kaj $D''(\tau) > 0$, do ili similas al $\exp(-a\tau/c)$. Vere, ili estas ĝuste $D(\tau) = \exp(-a\tau/c)$ se $p = 0$ kaj $l < 0$.

Kurbo α estas limo inter regionoj r_1 kaj r_2 , t.e., inter regiono de $D''(\tau)$ ĉiam pozitiva kaj regiono kie ĝi povas esti malpozitiva. Tiu kurbo malkovriĝas per forigo de τ el $D''(l, p, \tau) = 0$ kaj $D'''(l, p, \tau) = 0$. Oni montras, ke α havas horizontalan asimptoton, $p^2 = \frac{3}{2}(11\sqrt{33} - 59)$, t.e., $p \approx 2,51$.

Grafikaĵoj de r_2 malsamiĝas al tiuj de r_1 pro ĝibo. Tamen tiu ĝibo ne havas maksimumon, ĉar ĉiam $D'(\tau) \neq 0$. Tiu ĝibo okazas pro pliforta alviola kontribuo de γ faktoro. Vere, ĉar p estas pli granda kompare kun r_1 , komence la foriĝo estas malpli kolinia ol en r_1 , do alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro estas malpli forta. Tamen, tiu alruĝa kontribuo plifortiĝas kiam la foriĝo estas preskaŭ kolinia.

Kurbo β estas limo inter regionoj r_2 kaj r_3 , t.e., inter regiono de $D'(\tau)$ ĉiam malpozitiva kaj regiono kie ĝi povas esti pozitiva. Tiu kurbo malkovriĝas per forigo de τ el ekvacioj $D'(l, p, \tau) = 0$ kaj $D''(l, p, \tau) = 0$. Jen β :

$$l = \frac{1 - 5p^2/27}{\sqrt{1 - p^2/27}} - 1. \quad (3)$$

Oni klare rimarkas el (3), ke β havas horizontalan asimptoton $p = 3\sqrt{3}$.

Grafikaĵoj de r_3 malsamiĝas al tiuj de r_2 ĉar la ĝibo havas maksimumon. Tamen tiu maksimumo estas pli eta ol 1, do alviolo ne okazas. Ju pli granda p kompare kun $|l|$ des malpli kolinia la komenca foriĝo. Do la alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro malfortiĝas komence kaj la ĝibo pliiĝas.

Kurbo γ estas limo inter regionoj r_3 kaj r_4 , t.e., inter regiono de $D(\tau)$ pli eta ol 1 kaj regiono kie ĝi povas esti pli granda ol 1. Tiu kurbo malkovriĝas per forigo de τ el ekvacioj $D(l, p, \tau) = 1$ kaj $D'(l, p, \tau) = 0$; ĝi estas la parabolo $p = 2\sqrt{-2l}$.

Grafikaĵoj de r_4 malsamiĝas al tiuj de r_3 ĉar iliaj maksimumoj estas pli granda ol 1, t.e., poste komenca alruĝo estas alviolo. Tio okazas, ĉar la foriĝa movado komence estas sufiĉe ne kolinia, tiel kiel, post iom da tempo, alviola kontribuo de γ faktoro superas la alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro. Tio estas senpere relativeca fenomeno, ĉar Newtono nur alruĝo okazas ĉe foriĝa movado.

Grafikaĵoj de r_5 estas en limo inter r_4 kaj r_6 . Ili respondas al $l = 0$ do havas $D'(0) = 0$. Tio okazas ĉar komence ne estas proksimiĝo nek foriĝo. Tuj poste, alviola kontribuo de γ faktoro estras super alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro. Laste, la movado fariĝas preskaŭ kolinia foriĝo, do alruĝo de foriĝa faktoro estras.

Grafikaĵoj de r_6 respondas al $l > 0$. Komence estas proksimiĝo de observanto al fonto, do proksimiĝa faktoro dt_f/dt fortigas la alviolan kontribuon de γ . Laste, la movado fariĝas preskaŭ kolinia foriĝo, kaj la alruĝa kontribuo de foriĝa faktoro estras.

3 Detalo

Eblas pli detala analizo de regionoj r_4 , r_5 kaj r_6 el figuro 2. Fakte, figuro 3 montras subregionojn $\{r'_4, r''_4, r'''_4\}$, $\{r''_5, r'''_5\}$, $\{r''_6, r'''_6\}$, laŭ transfleksejoj en grafikaĵoj estas super aŭ sub $D = 1$.

Kurboj δ_1 kaj δ_2 limigas tiujn subregionoj kaj rilatas al la unua kaj dua transfleksejo, respektive. Ambaŭ kurboj malkovriĝas per forigo de τ el ekvacioj $D(l, p, \tau) = 1$ kaj $D''(l, p, \tau) = 0$. Uzante la parametron $m \in [1, \infty]$, jen ili:

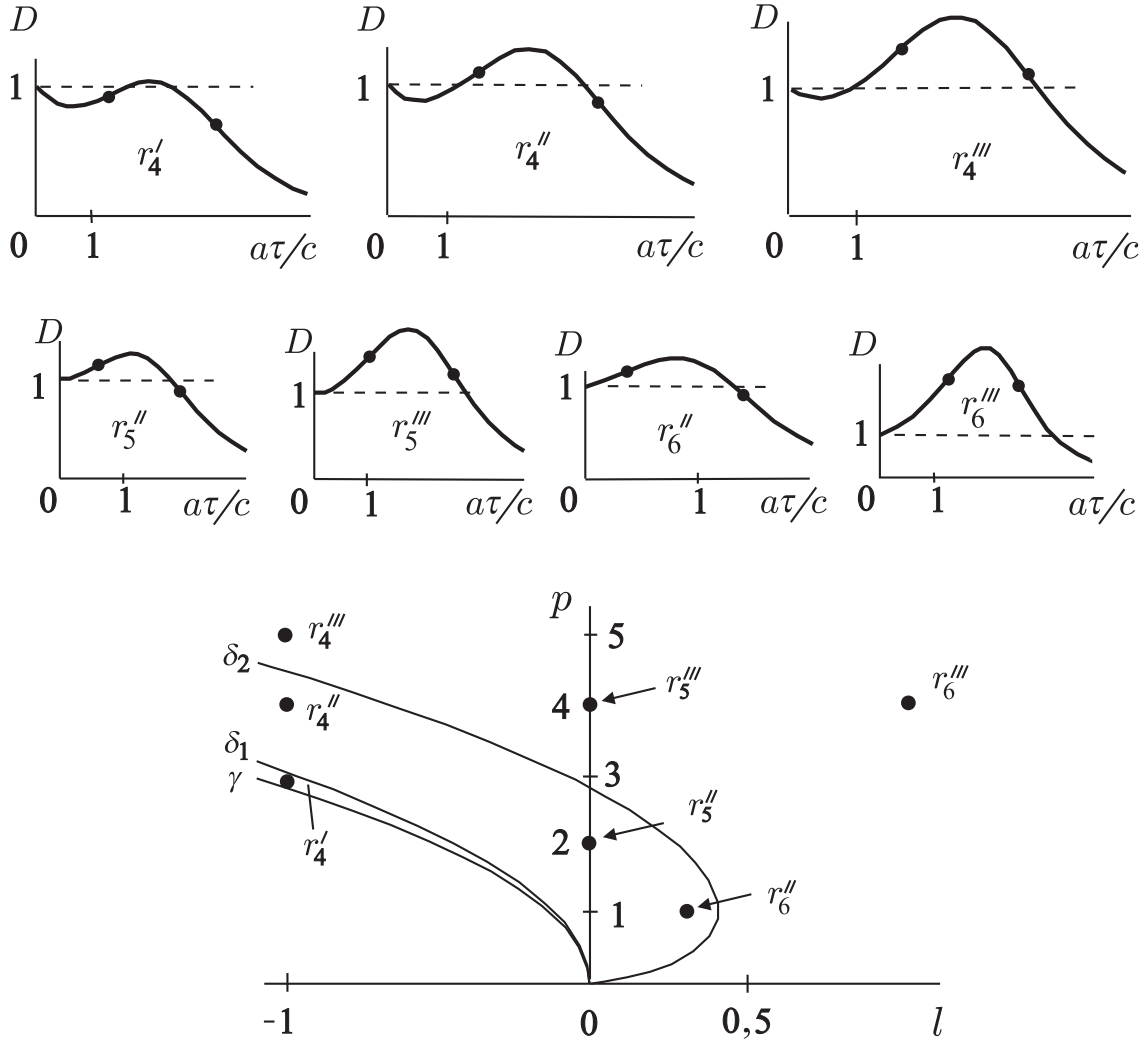
$$l = \frac{m-1}{m+1} \left(1 - 2m \mp \sqrt{6 + 3m^2} \right), \quad p = \frac{\sqrt{2(m-1)}}{m+1} \left(3m \pm \sqrt{6 + 3m^2} \right), \quad (4)$$

kie la superaj kaj subaj signaloj respondas al δ_1 kaj δ_2 , respektive. Oni montras, ke ambaŭ kurboj kuniĝas kun parabolo $p = 2\sqrt{-3l}$ ĉe $m \rightarrow \infty$.

4 Konkludo

Certe oni povas fari pli detalan matematikan analizon de grafikaĵoj de Dopplera faktoro kaj pridiskuti interpreton el ili. Ekzemple, akso $p = 0$ el regiono r_6 respondas al trapaso de fonto per observanto, farante malkontinuecon en Dopplera faktoro. Tiun aferon studas [7] kaj la plej grava rezulto estas en ties figuro **5.b**, plej specife en la kvadranto kun $\tau > 0$. La malkontinueco okazas ĉar je la momento de trapaso, alviolo pro kolinia proksimiĝo subite fariĝas alruĝo pro kolinia foriĝo.

Interesas rimarki, ke ĉi tiu studo taŭgas ankaŭ por komenca fazo de Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj, t.e., kiam moviĝanta observanto ricevas signalon el fonto, kiu ankoraŭ ne moviĝas. Tiun problemon pridiskutas antaŭa artikolo [9]. En estonta artikolo ni uzas rezultojn de ĉi tiu nuna artikolo por pli detaligi rezultojn de [9].



Figuro 3: Plu detaloj pri regionoj r_4 , r_5 kaj r_6 el figuro 2. Super estas sep ecoj de grafikaĵo de Dopplera faktoro D kontraŭ $a\tau/c$, responde al ĉiu subregiono de la malsupera diagramo. Tiu diagramo montras sep subregionojn $\{r_4', r_4'', r_4''', r_5'', r_5''', r_6'', r_6'''\}$ laŭ valoroj de $l = aL/c^2$ kaj $p = aP/c^2$, kaj montras kurbojn γ , δ_1 kaj δ_2 , kiuj limigas tiuj subregionoj. Subregionoj r_5'' (havante $p < 2\sqrt{2}$) kaj r_5''' (kies $p > 2\sqrt{2}$) estas sur akso $l = 0$. Nigraj buloj (\bullet) en la diagramo montras la valorojn de l kaj p rilatajn al ĉiu grafikaĵo, kaj nigraj buletoj (\bullet) en la grafikaĵoj montras transfleksejojn.

Citaĵoj

- [1] C. Møller, *The theory of relativity*, 2nd ed., Oxford U P, 1972.
- [2] W. Rindler, *Essential relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1977.
- [3] J. Dwayne Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am. J. Phys. **46** 83-9, 1978.
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, 4th rev. English ed., Butterworth-Heinemann, 1996.
- [5] W Cochran, *Some results on the relativistic Doppler effect for accelerated motion*, Am. J. Phys. **57** 1039-41, 1989.
- [6] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-006/06, 2006
<http://arxiv.org/abs/physics/0603053>.
- [7] F. M. Paiva, A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-002/07, 2007
<http://arxiv.org/abs/physics/0701092>.
- [8] F. M. Paiva, A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, Notas de Física, CBPF-NF-011/07, 2007
<http://arxiv.org/abs/0704.1130>.
- [9] F. M. Paiva, A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I*, Notas de Física, CBPF-NF-001/08, 2008
<http://arxiv.org/abs/0801.2290>.