

Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

28-a de februaro, 2008

Resumo

Ni priskribas luman Doppleran efikon inter same akcelataj fonto kaj observanto ĉe special-relativeco. La propraj akceloj estas konstantaj kaj paralelaj.

We describe the Doppler effect between equally accelerated light source and observer under the special relativity. The proper accelerations are constant and parallel. An English version is available by request.

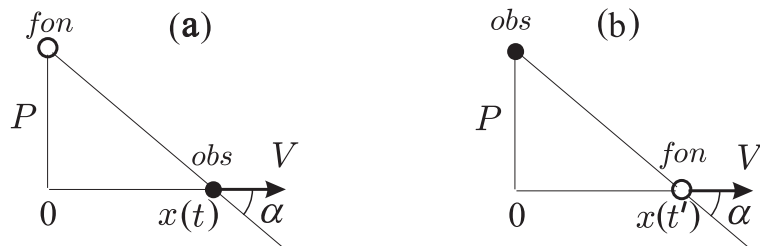
1 Enkonduko

Lorentzaj transformoj estas gravaj en special-relativeco. Ili montras kiel, el koordinata priskribo de fizika situacio per iu inercia referenca sistemo, oni trovas priskribon per alia inercia referenca sistemo. Tamen, tio ne montras tion kion observanto vere vidas. Por tio, oni devas konsideri plurajn faktorojn, ĉefe, Doppleran efikon.

En antaŭaj artikoloj [1, 2, 3] ni studis luman Doppleran efikon ĉe kelkaj specialaj situacioj: tie aŭ observanto aŭ fonto restas. Ĉi tie, ambaŭ moviĝas. Ili moviĝas ĉe konstanta propra akcelo, kiu tre taŭgas por special-relativeco. Fakte, tiu akcelo estas relativeca ekvivalenta de Newtona konstanta akcelo, kaj plibone ne generas rapidon pli granda ol rapido de lumo en vakuo, c ; cetere ĝi multe simpligas kalkulon, kaj havas specialajn kvalitojn pri kiuj ni diskutos en Konkludo.

Luma Dopplera efiko estas malsameco $\nu' \neq \nu$ de frekvenco ν' de eligita lumo kaj frekvenco ν de observata lumo, pro movado de fonto aŭ observanto, aŭ ambaŭ. Proporcio $D = \nu/\nu'$ nomiĝas Dopplera faktoro. Ĉar frekvenco estas inverso de periodo, tial ni difinas Doppleran faktoron kiel

$$D(\tau) := \frac{d\tau'}{d\tau} = \frac{\gamma(t)}{\gamma(t')} \frac{dt'}{dt} . \quad (1)$$



Figuro 1: El sekcio 1. (a) Restanta fonto kaj moviĝanta observanto. (b) Kontraŭe.

Ĉi tie $d\tau'$ estas infinitezima propra intertempo per fonto inter eligo de du lumaj signaloj, kaj $d\tau$ estas infinitezima propra intertempo per observanto inter enigo de tiuj signaloj. Momento de eligo de lumo-signalto el fonto nomiĝas t' aŭ τ' , kaj momento de enigo de tiu signalto en observanto nomiĝas t aŭ τ . Ĉe la tria termo en (1), ni uzis rilaton de intertempa dilato $d\tau = dt/\gamma$ inter propra kaj koordinata intertempoj, kie $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, kaj $v := dx/dt$.

Por kalkuli Doppleran faktoron ni unue kalkulas distancon inter loko de fonto je momento t' de eligo de signalto kaj loko de observanto je momento t de enigo de tiu signalto. Poste ni egalas tiun distancon al distanco $c(t - t')$ kiun lumo trakuras dum intertempo $t - t'$. Tiu ekvacio, nomota elig-eniga ekvacio, rilatas momentojn de eligo t' (aŭ τ') kun momentoj de enigo t (aŭ τ). Diferenciante ĝin ni havigas Doppleran faktoron je momento t (aŭ τ), per ekvacio (1).

Dopplera efiko kun $D < 1$ nomiĝas “ruĝ-delokiĝo”, ĉar frekvenco estiĝas; ekzemple, delokiĝo de flava koloro al ruĝa. Kontraŭe, efiko kun $D > 1$ nomiĝas “viol-delokiĝo”. Se $D = 1$ oni diras ke ne estas Dopplera efiko. Rimarku, ke ĉar propratempoj $d\tau'$ kaj $d\tau$ estas Lorentze skalaraj, do ankaŭ Dopplera faktoro D estas Lorentze skalara.

Iuj rezultoj pri Dopplera efiko troviĝas ekzemple en [1, 2, 3, 4]. Unue, se fonto kaj observanto kolinie foriĝas unu de la alio, okazas ruĝ-delokiĝo. Kontraŭe, se ili kolinie alproksimiĝas, okazas viol-delokiĝo. Due, se fonto ĉirkaŭiras restantan observanton, okazas ruĝ-delokiĝo, pro intertempa dilato ĉe fonto. Kontraŭe, se observanto ĉirkaŭiras restantan fonton, okazas viol-delokiĝo.

Iom pli ĝenerale, estiĝu restanta fonto kaj moviĝanta observanto kun rapido V , kiel en figuro 1(a), do elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + x^2(t)} = c(t - t')$. Diferenciante kaj uzante iom da geometrio, Dopplera faktoro estiĝas

$$D = \gamma \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha \right) . \quad (2)$$

Kontraŭe, por restanta observanto kaj moviĝanta fonto kun rapido V , kiel en figuro 1(b), elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + x^2(t')} = c(t - t')$. Diferenciante, Dopplera faktoro estiĝas

$$D = \left[\gamma \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha \right) \right]^{-1} . \quad (3)$$

En tiuj du pli ĝeneralaj okazoj, Dopplera faktoro dependas de rapido kaj de angulo.

Ni esploras kvin malsamajn fizikajn sistemojn, en kiuj observanto kaj fonto moviĝas kun sama konstanta propra akcelo. Je la unuaj du sistemoj, observanto kaj fonto moviĝas kolinie.

Je la tria, movadoj estas paralelaj kaj ortaj al linio kunigante ilin. Kaj fine, je la du lastaj, movadoj estas ankaŭ paralelaj, sed klinaj rilate al tiu linio. Ĉe ĉiu sistemo, ni inspektas plurajn eblajn fazojn. Ĉe fazo 0, restanta observanto ricevas signalon eligitan el fonto ankaŭ restanta; ĉar ne estas Dopplera efiko en tiu fazo ($D = 1$), tiu fazo ne estos ordinare prezentata. Ĉe fazo 1, moviĝanta observanto ricevas signalon eligitan el ankoraŭ restanta fonto. Fine, ĉe fazo 2, moviĝanta observanto ricevas signalon eligitan el ankaŭ moviĝanta fonto; ni rimarkos, ke ĉi tiu fazo ne ĉiam ekzistas.

Sekcio 2 difinas propran akcelon de korpo, kaj priskribas movadon de korpo se tiu akcelo estas konstanta. En sekcio 3, observanto moviĝas malantaŭ fonto, kaj en sekcio 4, kontraŭe. Sekcio 5 priskribas la nekolinian ortan movadon. Sekcioj 6 kaj 7 priskribas klinajn movadojn kun observanto malantaŭ fonto kaj kontraŭe. Sekcio 8 konkludas.

2 Konstanta propra akcelo

Antaŭigante studon de Dopplera faktoro, ĉi tiu sekcio difinas propran akcelon, kaj priskribas movadon laŭ konstanta propra akcelo, kiel Møller [5, paĝoj 73-74] kaj Rindler [4, paĝo 49].

Estiĝu inercia referenca sistemo en kiu korpo momente ripozas. En tiu sistemo, derivaĵo de rapido de korpo rilate al tempo nomiĝas propra akcelo a de korpo (rimarku, ke a estas Lorentze skalara). Ĉe unudimensia movado, oni montras, ke en iu ajn inercia referenca sistemo

$$a = \frac{d(\gamma v)}{dt} . \quad (4)$$

Estiĝu korpo komence restanta ($v_0 = 0$) en pozicio 0 de akso x de inercia sistemo S_0 de referenco. Ekde $t = 0$ ($\tau = 0$), ĝi moviĝu kun konstanta propra akcelo a en pozitiva direkto de x . Integrate (4), la movado estiĝas

$$x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1 \right) = \frac{c^2}{a} [\cosh(a\tau/c) - 1] , \quad (5)$$

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}} = c \tanh(a\tau/c) , \quad (6)$$

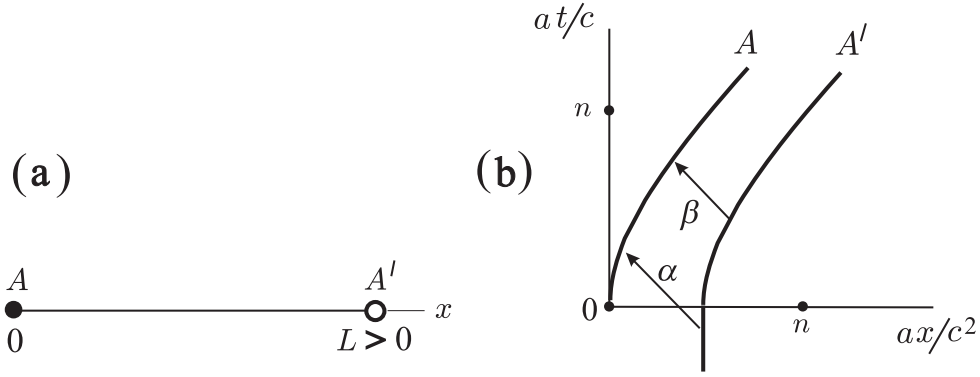
$$\gamma = \sqrt{1 + (at/c)^2} = \cosh(a\tau/c) , \quad (7)$$

$$at/c = \sinh(a\tau/c) . \quad (8)$$

Rimarku en (6), ke $v \rightarrow c$ kiam $t \rightarrow \infty$. Eblas pruvi, ke Newtona akcelo ($a_N := dv/dt$) de tiu movado estas $a_N(t) = a/\gamma^3(t)$, kiu etiĝas laŭ tempo, ĉar $\gamma(t)$ eĝiĝas laŭ rapido.

3 Observanto malantaŭ fonto

Laŭ figuro 2(a), kaj observanto A kaj luma fonto A' restas en inercia sistemo S_0 de referenco. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren en akso x , kun sama konstanta propra akcelo a .



Figuro 2: El sekcio 3. (a) Observanto A kaj luma fonto A' komence restas ĉe $x = 0$ kaj $x = L > 0$, respektive. (b) Ambaŭ A kaj A' akceliĝas dekstren ekde $t = 0$. Sagoj je 135° indikas lumajn signalojn. Observanto ricevas signalojn eligitajn el fonto kaj restanta (α) kaj moviĝanta (β).

Ĉe fazo 1, observanto moviĝas laŭ (5), kaj ricevas signalojn (kiel sago α en figuro 2(b)) eligitajn el fonto restanta en $L > 0$; do elig-eniga ekvacio estas $L - x(t) = c(t - t')$. Uzante (5) por $x(t)$, kaj (8) por $t(\tau)$, kaj $t' = \tau'$, tiu ekvacio estiĝas

$$\tau' = \frac{c}{a} [\exp(a\tau/c) - (1 + aL/c^2)] . \quad (9)$$

Fazo 1 finiĝas je τ_0 , kiu estas la valoro de τ en (9) se $\tau' = 0$:

$$\exp\left(\frac{a\tau_0}{c}\right) := 1 + \frac{aL}{c^2} . \quad (10)$$

Kalkulante $d\tau'/d\tau$ el (9) aperas Dopplera faktoro

$$D_1 = \exp(a\tau/c), \quad 0 < \tau < \tau_0 . \quad (11)$$

Oni rimarkas, ke D eksponenciale egiĝas en fazo 1, kiel figuro 3(b) montras. Tio estas facile komprenebla, ĉar en inercia sistemo S_0 , observanto alproksimiĝas al restanta fonto pli kaj pli rapide, do li vidas viol-delokiĝon pli kaj pli forta.

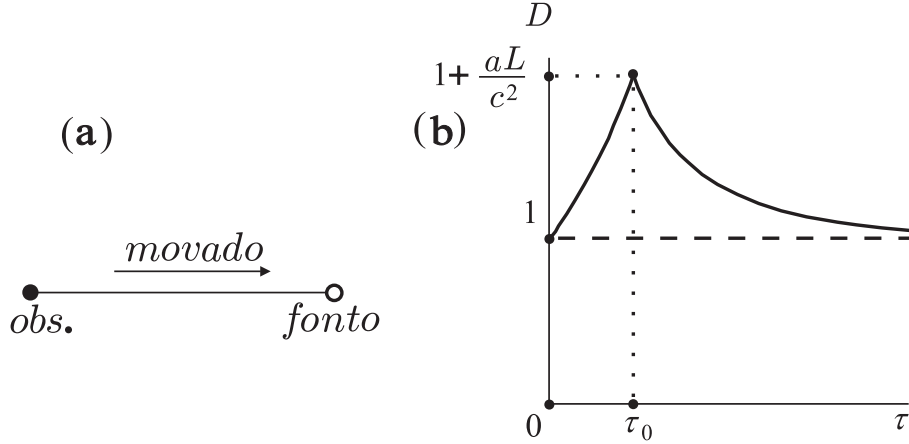
Ĉe fazo 2 (kiel sago β en figuro 2(b)), ambaŭ A' kaj A moviĝas, do nova elig-eniga ekvacio estas $L + x(t') - x(t) = c(t - t')$; uzante (5) por $x(t')$ kaj $x(t)$, kaj uzante (8) por t kaj t' , tiu ekvacio estiĝas

$$\exp(a\tau'/c) = \exp(a\tau/c) - (aL/c^2) . \quad (12)$$

Fine, kalkulante $d\tau'/d\tau$ el (12) aperas faktoro

$$D_2 = \frac{1}{1 - (aL/c^2) \exp(-a\tau/c)} , \quad \tau > \tau_0 . \quad (13)$$

Ni rimarkas en (13) kaj en figuro 3(b), ke D_2 etiĝas ekde $\tau = \tau_0$. Tio estas facile komprenebla en inercia sistemo S_0 de referenco: Newtona akcelo $a_N(t)$ de observanto, je momento t de ricevo



Figuro 3: El sekcio 3. (a) Direkto de akcelo kaj movado. (b) Dopplera faktoro D kiel funkcio de propratempo τ de observanto. Estas τ_0 en (10).

de lumo, estas pli eta ol Newtona akcelo $a_N(t')$ de fonto, je momento $t' < t$ de eligo de tiu lumo; do observanto en $x(t)$ alproksimiĝas al loko $x(t')$ de eligo de lumo pli kaj pli malrapide.

Ni ankaŭ rimarkas en (13) kaj en figuro 3(b), ke okazas $D_2 \rightarrow 1$ kiam $\tau \rightarrow \infty$; tiam ambaŭ observanto kaj fonto havas rapidon ĉirkaŭe c , kaj ne ekzistas Dopplera efiko. Newtona kinematiko facile eksplikas tiun faktan: se fonto kaj observanto estas kolinie moviĝantaj kun similaj rapidoj, Dopplera efiko ne ekzistas. Sed relativeca kinematiko bezonas fari pli detalan analizon. Rapido de observanto (je momento τ de ricevo de signalo) mezurata en inercia sistemo de momenta ripozo de fonto (je momento τ' de eligo de tiu signalo) estas $V = [v(\tau) - v(\tau')]/[1 - v(\tau)v(\tau')/c^2]$. Uzante (6) por $v(\tau)$ kaj $v(\tau')$, tiu estiĝas $V = c \tanh a(\tau - \tau')/c$. Ekvacio (12) implicas $(\tau - \tau') \rightarrow (L/c) \exp(-a\tau/c) \rightarrow 0$ kiam $\tau \rightarrow \infty$, do relativa rapido V (de loko de ricevo al loko de eligo) nuliĝas kiam $\tau \rightarrow \infty$, eksplikante $D_2 \rightarrow 1$.

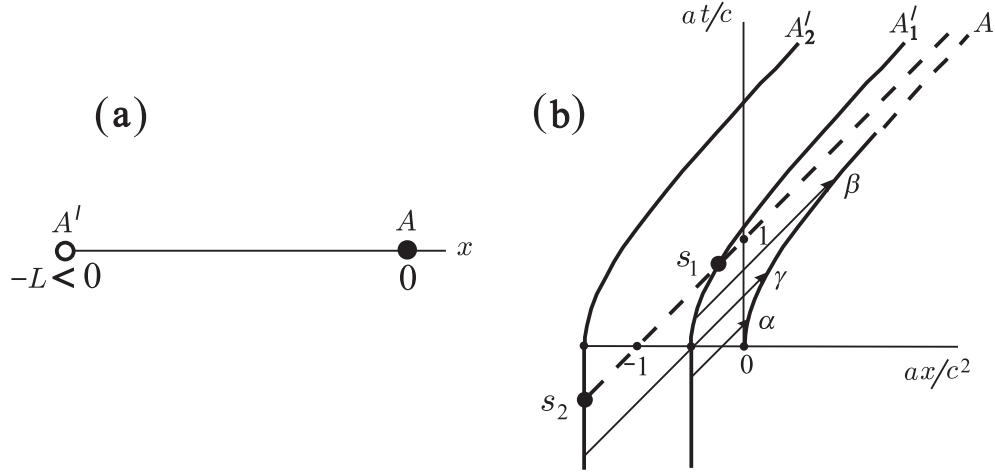
Kurioze, ĉe inercia sistemo S_0 de referenco, distanco inter loko $L + x(t')$ de eligo de signalo kaj loko $x(t)$ de ricevo ĉiam estiĝas, de L je $t = 0$ ĝis $L/2$ je $t \rightarrow \infty$. Tio estas facile komprenebla ĉar rapido de observanto kiam $t \rightarrow \infty$ estas proksimume c , kaj rapido de signalo estas $-c$; do renkonto de observanto kun signalo okazas ĉe mezo de konstanta distanco L de observanto al fonto.

4 Fonto malantaŭ observanto

Laŭ figuro 4, observanto A komence restas en $x = 0$, kaj fonto A'_1 aŭ A'_2 komence restas en $-L_1$ aŭ $-L_2$, respektive, estante $0 < L_1 < c^2/a$ kaj $L_2 > c^2/a$. Por fazo 1, elig-eniga ekvacio estas $L + x(t) = c(t - t')$. Tiu fazo daŭras ĝis momento τ_0 laŭ

$$\exp\left(-\frac{a\tau_0}{c}\right) := 1 - aL/c^2 \quad \text{se } aL/c^2 < 1. \quad (14)$$

Rimarku, ke se $L > c^2/a$ (kiel por fonto A'_2 ĉe figuro 4(b)), fazo 1 daŭras ĝis $\tau \rightarrow \infty$, kaj do fazo 2 ne ekzistas. En tia okazo, lasta signalo s_2 en figuro 4(b), kiu atingas observanton A (je



Figuro 4: El sekcio 4. (a) Fonto A' kaj observanto A komence restas en $x = -L < 0$ kaj $x = 0$, respektive. (b) Ambaŭ akceliĝas dekstren ekde $t = 0$; fontoj A'_1 kaj A'_2 moviĝas ekde $x = -L_1$ kaj $-L_2$, respektive, estante $0 < L_1 < c^2/a$ kaj $L_2 > c^2/a$. Sagoj je 45° indikas lumajn signalojn. Moviĝanta observanto A ricevas lumon eligitan el fonto A'_1 kaj restanta (α) kaj moviĝanta (β). Sed li ricevas lumon eligitan el fonto A'_2 nur restanta (γ). Eventoj s_2 , aŭ s_1 , estas lasta eligo de signalo atinganta A . La strekata rekta linio estas asimptoto de hiperbola kurbo de observanto A .

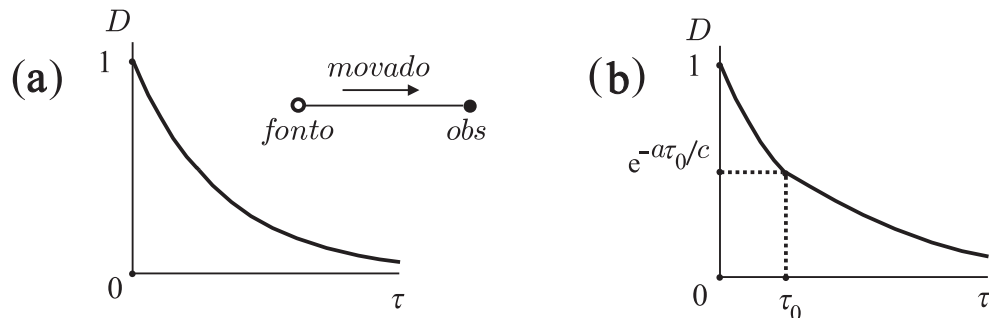
$\tau \rightarrow \infty$) estas eligita je $t'_2 = -(1/c)(L - c^2/a)$. Signaloj eligitaj post t'_2 ne atingas observanton kiun ekmoviĝis sufiĉe fore de fonto ($L > c^2/a$). Se tamen $0 < L < c^2/a$, fazo 2 ekzistas.

Por fazo 1, el elig-eniga ekvacio, Dopplera faktoro $d\tau'/d\tau$ estiĝas (vidu figuron 5)

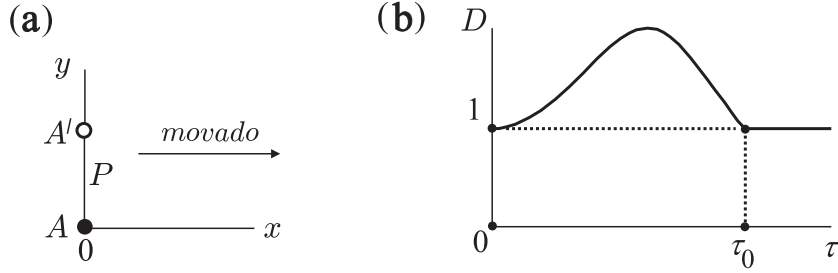
$$D_1 = \exp\left(-\frac{a\tau}{c}\right), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (15)$$

τ_0 estante momento de ricevo de lumo eligita je $\tau' = 0$. Estas facile komprenebla, en inercia sistemo S_0 de referenco, kial $D_1(\tau)$ eksponencie etiĝas: observanto iras pli kaj pli rapide fore de restanta loko de eligo de lumo.

Por fazo 2, elig-eniga ekvacio estas $L + x(t) - x(t') = c(t - t')$, do Dopplera faktoro $d\tau'/d\tau$



Figuro 5: El sekcio 4. Dopplera faktoro D kiel funkcio de propra tempo τ de observanto. (a) Okazo $L > c^2/a$ (kiel por fonto A'_2 en figuro 4(b)), havanta nur unu fazon. (b) Okazo $0 < L < c^2/a$ (kiel por fonto A'_1 en figuro 4(b)), havanta du fazojn. Estas τ_0 en (14).



Figuro 6: El sekcio 5. (a) Komenca pozicio de fonto A' kaj observanto A . (b) Dopplera faktoro D kiel funkcio de propratempo τ de observanto. Estas τ_0 en (18).

estiĝas (vidu figuron 5(b))

$$D_2 = \frac{1}{1 + (aL/c^2) \exp(a\tau/c)}, \quad 0 < L < c^2/a, \quad \tau > \tau_0. \quad (16)$$

En tia okazo, signalo eligita je $\tau'_1 := (c/a) \ln(c^2/aL)$ estas la lasta kiu sukcesas atingi observanton (kiam $\tau \rightarrow \infty$). Vidu s_1 en figuro 4(b).

Ni rimarkas en figuro 5(b), ke $D_2 \rightarrow 0$ kiam $\tau \rightarrow \infty$; tiam rapido de observanto ĉirkaŭas c , kaj li ricevas signalon eligitan je momento τ'_1 . Je ĉi tiu finhava tempo, rapido de fonto estas ankaŭ pozitiva, sed ne ĉirkaŭas c ; tio klarigas ekstreman ruĝ-delokiĝon $D_2 \rightarrow 0$.

Oni montras, ke je $\tau = \tau_0$, okazas $dD_1/d\tau = -(a/c)(1 - aL/c^2)$ kaj $dD_2/d\tau = -(a/c)(1 - aL/c^2)aL/c^2$. Ĉar $aL/c^2 < 1$, je τ_0 , grafikaĵo estas malpli klinata ĉe fazo 2 ol ĉe fazo 1, kiel montras figuro 5(b). Tio okazas ĉar ekde τ_0 , ricevataj signaloj estas eligitaj el jam moviĝanta fonto.

5 Nekoliniaj movadoj

Laŭ figuro 6(a), observanto A restas en pozicio $[x, y] = [0, 0]$ kaj luma fonto A' restas en pozicio $[0, P]$. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren kun sama konstanta propra akcelo a . Komence, moviĝanta observanto ricevas lumon el ankoraŭ restanta fonto, do elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + x^2(t)} = c(t - t')$. Uzante (5) por $x(t)$, (8) por $t(\tau)$, kaj $t' = \tau'$, poste kalkulante $d\tau'/d\tau$, aperas Dopplera faktoro ĉe fazo 1 (vidu figuron 6(b))

$$D_1 = \cosh(a\tau/c) \left(1 - \frac{\tanh(a\tau/c)(\cosh(a\tau/c) - 1)}{\sqrt{(aP/c^2)^2 + (\cosh(a\tau/c) - 1)^2}} \right), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (17)$$

τ_0 estante momento de ricevo de lumo eligita je $\tau' = 0$:

$$\cosh(a\tau_0/c) := 1 + \frac{1}{2}(aP/c^2)^2. \quad (18)$$

Ni analizas tiun grafikaĵon ĉirkaŭ $\tau = 0$. Tiuokaze, el (17), okazas $D_1 \approx 1 + (1/2)(a\tau/c)^2$. Ni rimarkas, ke je $\tau = 0$, okazas $dD_1/d\tau = 0$ kaj $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$. Do tiu grafikaĵo komencas

horizontale kaj kurbiĝas supren (ĝia kurbeco ne dependas de P). La interpreto de tiu rezulto estas facila. Komence okazas orta Dopplera efiko, kiu ne ekzistas en Newtona kinematiko. Tiu ordinare faras etan viol-delokiĝon, kiu egiĝas ĉar rapido egiĝas. Poste, la for-movado aperigas faktoron de ruĝ-delokiĝo. Fine ĉi tiuj du malaj efektoj nuligas unu la alion je $\tau = \tau_0$, ĝuste kiam lasta signalo de fonto ankoraŭ ripozanta atingas observanton.

Ĉe fazo 2, ambaŭ observanto kaj fonto estas moviĝantaj, do elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + [x(t) - x(t')]^2} = c(t - t')$. Uzante (5) por $x(t)$ kaj $x(t')$, kaj uzante (8) por t kaj t' , tiu ekvacio multe simpliĝas al

$$\tau' = \tau - \tau_0 ; \quad (19)$$

do $D_2 = 1$, t.e., ne ekzistas Dopplera efiko ĉe fazo 2. Vidu figuron 6(b).

Nun ni diskutas ĉi tiun konstantecon de Dopplera faktoro. Kiel ni raportis en Enkonduko, se observanto pasas Orte restantan fonton, okazas viol-delokiĝo pro tempa dilato je rapido de observanto. Alie, se observanto iras kolinie fore de restanta fonto, okazas ruĝ-delokiĝo. En ĉi tiu sekcio, tiuj du komponoj konkuras. Tiamaniere Dopplera efiko dependas de rapido de observanto rilate al fonto, kaj de angulo inter tiu rapido kaj direkto de signal-eligo, kiel en figuro 1(a). Konsideru unue la rapidon. Same kiel en sekcio 3, la relativa rapido estas $V = c \tanh a(\tau - \tau')/c$. Pro ekvacio (19), V estas konstanta. Due, konsideru la angulon. En inercia referenca sistemo S_0 , okazas $\sin \alpha = P/[c(t - t')]$. Laŭ Lorentza transformo, en inercia sistemo de momenta ripozo de fonto, la diferenco de tempoj estiĝas

$$\gamma(t') \left((t - t') - \frac{v(t')}{c^2} [x(t) - x(t')] \right) = \frac{c}{a} \sinh \frac{a(\tau - \tau')}{c} \quad (20)$$

kie ni uzis (3)–(6) por trovi la dekstran termon. Pro ekvacio (19) denove, α havas la saman valoron en ĉiu inercia sistemo de momenta ripozo de fonto, eksplikante kial la Dopplera faktoro estas konstanta.

Ni ĵus diskutis pri la konstanteco de Dopplera faktoro en fazo 2. Pri ĝia valoro, notu ke $D(\tau_0) = 1$ por iu ajn valoro de P . Tiun interesan (kaj misteran?) fakton prezentas plidetale nia estonta artikolo *Dopplera efiko de luma ebena vidata per akcelata korpo*. Ĉi tie en Konkludo, ni rediskutis pri konstanteco kaj nuleco de D_2 uzante heŭristikajn argumentojn.

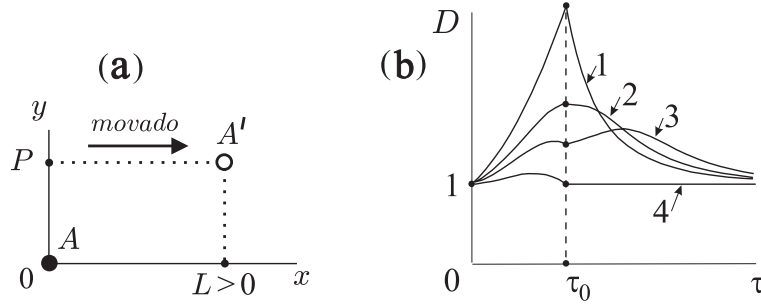
6 Observanto malantaŭ fonto, nekolinie

Ni ĝeneraligas sekciojn 3 kaj 5. Vidu en figuro 7(a), ke observanto A kaj fonto A' komence restas en $[x, y] = [0, 0]$ kaj $[L, P]$, respektive, L estante pozitiva kaj P ioma. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren kun sama konstanta propra akcelo a . Por fazo 1, elig-eniga ekvacio estas $\sqrt{P^2 + [L - x(t)]^2} = c(t - t')$. Tiu fazo daŭras ĝis momento τ_0 laŭ

$$\cosh \frac{a\tau_0}{c} := 1 + \frac{a^2(L^2 + P^2)/c^4}{2(1 + aL/c^2)} . \quad (21)$$

Interesas scii kie estas observanto kiam fazo 1 finiĝas. Tio dependas de valoroj de P , kaj L , kaj a . Fakte, uzante (5) kaj (21), oni pravas ke la signumo de $x(\tau_0) - L$ estas

$$\sigma := \text{sign}(P^2 - L^2 - 2c^2L/a) . \quad (22)$$



Figuro 7: El sekcio 6. (a) Komencaj pozicioj de observanto A kaj fonto A' . (b) Ekzemploj de Dopplera faktoro kiel funkcio de propratempo de observanto, por $\cosh a\tau_0/c = 2$. Valoro de $[aL/c^2, aP/c^2]$ en ĉiu ekzemplo estas: **1**: $[1 + \sqrt{3}/2, 3/2]$; **2**: $[1, \sqrt{3}]$; **3**: $[1/2, \sqrt{11}/2]$; **4**: $[0, \sqrt{2}]$.

Do fazo 1 finiĝas kiam observanto estas en aŭ $x(\tau_0) < L$ aŭ $x(\tau_0) = L$ aŭ $x(\tau_0) > L$ laŭ σ estas malpozitiva aŭ nula aŭ pozitiva, respektive. Tio estas facile komprenebla, ĉar des pli granda $|P|$, des pli malfrua estas ricevo de lumo, do des pli granda estas $x(\tau_0)$.

Por fazo 1, el la supra elig-eniga ekvacio, Dopplera faktoro estiĝas

$$D_1 = \cosh(a\tau/c) \left(1 - \frac{\alpha_1 \tanh(a\tau/c)}{\sqrt{\alpha_1^2 + (aP/c^2)^2}} \right), \quad 0 < \tau < \tau_0, \quad (23)$$

estante

$$\alpha_1 := \cosh a\tau/c - 1 - aL/c^2. \quad (24)$$

Vidu figuron 7(b). Eblas pruvi, ke $dD_1/d\tau = (aL/c)/\sqrt{L^2 + P^2}$ je $\tau = 0$; t.e., $dD_1/d\tau$ estas pozitiva (krom se $L = 0$ kiel ĉe kurbo **4**, kiu ripetas figuron 6(b) el sekcio 5). La komence kreskanta valoro de $D_1(\tau)$ okazas pro la eganta rapido de alproksimiĝado de observanto al fonto. Eblas pruvi ankaŭ, ke denove $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$ je $\tau = 0$, same kiel en sistemo de sekcio 5; do la komenca kurbeco de $D_1(\tau)$ estas supren, kaj dependas nek de L nek de P .

Ni vidas en figuro 7(b), ke la klino de $D_1(\tau)$, je τ_0 , estas aŭ pozitiva (kurbo **1**), aŭ nula (**2**), aŭ malpozitiva (**3**). Simpla kalkulo pruvas, ke tiuj signumoj estas $-\sigma$. La ĝeneralaj formoj de tiuj grafikaĵoj estas kombinoj de grafikaĵoj de figuro 3(b) kun figuro 6(b). Fakte, se L estas sufiĉe granda, figuro 3(b) superas, kaj kontraŭe se P estas sufiĉe granda, figuro 6(b) superas.

Ĉe fazo 2, estiĝas $\sqrt{P^2 + [L + x(t') - x(t)]^2} = c(t - t')$; uzu (5) por $x(\tau)$ kaj $x(\tau')$, kaj uzu (8) por $t(\tau)$ kaj $t'(\tau')$, poste kalkulu Doppleran faktoron $d\tau'/d\tau$:

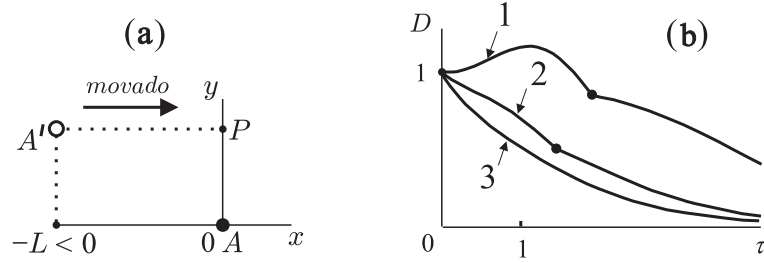
$$D_2 = \frac{\sinh(a\tau/c - a\tau'/c) + (aL/c^2) \sinh a\tau/c}{\sinh(a\tau/c - a\tau'/c) + (aL/c^2) \sinh a\tau'/c}, \quad \tau_0 < \tau < \infty, \quad (25)$$

estante

$$\cosh a\tau'/c = \frac{1}{\alpha_2} \left(\alpha_3(1 + \alpha_1) + \sqrt{\alpha_3^2 + \alpha_2 \sinh a\tau/c} \right), \quad (26)$$

$$\alpha_2 := 2(aL/c^2) \cosh a\tau/c - 1 - (aL/c^2)^2, \quad (27)$$

$$\alpha_3 := \frac{1}{2} \left(\alpha_2 - 1 - (aP/c^2)^2 \right); \quad (28)$$



Figuro 8: El sekcio 7. (a) Komencita pozicio de fonto A' kaj de observanto A . (b) Ekzemploj de Dopplera faktoro kiel funkcio de propratempo de observanto. Valoroj de paro $[aL/c^2, aP/c^2]$ en ĉiu ekzemplo estas: **1**: $[3/20, 2]$; **2**: $[1/2, 1]$; **3**: $[5/4, 1]$. En ekzemplo **3**, $aL/c^2 > 1$, do ĉi tiu okazo ne prezentas fazon 2.

vidu figuron 7(b). Same kiel en figuroj 3(b) kaj 6(b), ĉi tie $D_2(\infty) = 1$. Figuro 7(b) ankaŭ montras, ke klino de $D_2(\tau)$, je τ_0 , estas aŭ malpozitiva, aŭ nula, aŭ pozitiva, kaj eblas pruvi, ke tiuj signumoj estas σ . Fakte, se fazo 2 komencas kiam observanto estas en $x(\tau_0) < L$, je tiu momento fonto foriras kun Newtona akcelo pligranda ol tiu de observanto. Do la viol-delokiĝo malfortiĝas. Kontraŭe, se observanto estas en $x(\tau_0) > L$, je tiu momento, fonto alproksimiĝas al li, do la viol-delokiĝo fortiĝas.

7 Fonto malantaŭ observanto, nekolinie

Ĉi tiu sekcio ĝeneraligas sekciojn 4 kaj 5. Vidu en figuro 8(a), ke observanto A kaj luma fonto A' komence restas respektive en $[x, y] = [0, 0]$ kaj $[-L, P]$, L estante pozitiva kaj P ioma. Ekde $t = 0$, ambaŭ moviĝas dekstren je sama konstanta propra akcelo a . Elig-enigaj ekvacioj de fazo 1 kaj 2 estas tiuj de sekcio 6 per anstataŭigo de L al $-L$, do ekvacioj (23)–(28) pravas ankaŭ ĉi tie, per tiu anstataŭigo.

Fazo 1 daŭras ĝis momento τ_0 , laŭ ekvacio (21) (kun $-L$ anstataŭ L). Same kiel en sekcio 6, ni vidas, ke bezonas distingi du eblecojn. Se $L > c^2/a$, fazo 1 etendiĝas ĝis $\tau \rightarrow \infty$, kiel en kurbo **3** de figuro 8(b); en tia okazo, lumo eligita nur antaŭ $t'_2 = -(1/c)(L - c^2/a)$ atingas observanton, same kiel en sekcio 4. Se tamen $0 < L < c^2/a$, fazo 2 ekzistas. Tio estas videbla en kurboj **1** kaj **2** de figuro 8(b).

Dum fazo 1, Dopplera faktoro estas laŭ ekvacio (23) (kun $-L$ anstataŭ L). Vidu en figuro 8(b), ke ĉiuj kurboj komencas malsupren; tio okazas ĉar observanto komence iras kun eganta rapido, fore de loko de lum-eligo. Fakte, simpla kalkulo pruvas, ke $dD_1/d\tau = -(aL/c)/\sqrt{L^2 + P^2}$ kaj $d^2D_1/d\tau^2 = (a/c)^2$ je $\tau = 0$.

Dum fazo 2, Dopplera faktoro estas laŭ ekvacio (25) (kun $-L$ anstataŭ L). El tiu ekvacio, $D(\tau_0) = 1 - aL/c^2 < 1$, do je τ_0 , Dopplera efiko estas ruĝ-delokiĝo.

Same kiel en sekcio 4, ekzistas signaloj kiuj neniam atingas observanton. Fakte, la lasta signalo atinganta observanton (je $\tau \rightarrow \infty$) estas eligita je $\tau'_1 = (c/a) \ln(c^2/aL)$. Do observanto kun rapido ĉirkaŭ c ricevas signalon eligata el fonto kun eta rapido, eksplikante $D_2 \rightarrow 0$. Fine rimarku, ke ĉiu grafikaĵo en figuro 8(b) estas kombino de figuro 5(b) kun figuro 6(b); speciale, $D_2(\infty) = 0$.

8 Konkludo

Ĉi tiu artikolo zorgis pri Doppleran efikon se luma fonto kaj observanto moviĝadas paralele, ambaŭ kun sama konstanta propra akcelo, kaj komencante el restado je sama momento. Ni vidis, ke se observanto moviĝas malantaŭ fonto (sekcioj 3 kaj 6), komence okazas viol-delokiĝo, kiu iĝas nula efiko kiam $t \rightarrow \infty$ (figuroj 3(b) kaj 7(b)). Se, kontraŭe, fonto moviĝas malantaŭ observanto (sekcioj 4 kaj 7), komence okazas finia ruĝ-delokiĝo, kiu iĝas nefinia ruĝ-delokiĝo ($D \rightarrow 0$) kiam $t \rightarrow \infty$ (figuroj 5 kaj 8(b)). Rimarku, ke, en sekcio 7, povas ekzisti viol-delokiĝo inter la du ruĝ-delokiĝoj. Speciale, se observanto kaj fonto moviĝas orte al linio kunigante ilin (sekcio 5), figuro 6(b) montris, ke komence estas viol-delokiĝo, kiu iĝas nula efiko ekde $t = t_0$.

Nun, ni klarigas konstantecon kaj neeston ($D = 1$) de Dopplera efiko ĉe fazo 2 de ortanekolinia movado de sekcio 5. Per inercia sistemo de momenta ripozo de fonto kaj observanto, restanta fonto en $[x, y] = [0, P]$, kun propra akcelo a laŭ x , eligas lum-signalon. Je tiu momento, restanta observanto en $[x, y] = [0, 0]$ havas propran akcelon a laŭ x . La valoro de $\tau - \tau'$ dependas de ĉi tiuj supraj kondiĉoj. Iom poste, per nova inercia sistemo de momenta ripozo de fonto kaj observanto, propraj akceloj, rapidoj (nulaj) kaj relativaj pozicioj estas samaj. Ĉar la kondiĉoj estas samaj, do la valoro de $\tau - \tau'$ estas la sama, kaj do $D = 1$. Rimarku, ke ĉi tiu argumento validas nur: (i) se propraj akceloj estas konstantaj (memoru, ke laŭ sekcio 2, propra akcelo estas difinata per inercia sistemo de momenta ripozo), (ii) se movado estas orta, ĉar kontraŭe, malsamaj Lorentzaj etiĝadoj de distanco L aperas, (iii) ĉe fazo 2, ĉar kontraŭe, la kondiĉoj ne estas samaj per sekvantaj inerciaj sistemoj.

Estas mirinda, taŭgeco de konstanta propra akcelo al Dopplera efiko, ĉe speciala relativeco; tiu taŭgeco estos plidetale vidata en estonta artikolo.

Lasta komento estas: ni baldaŭ publikigos parton II de ĉi tiu artikolo, rilate al luma Dopplera efiko inter korpoj paralele moviĝantaj, ambaŭ je (malsamaj) konstantaj propraj akceloj; speciale ni traktas pri rigida movado [1].

Gratuloj

Ni kore dankas al Leo Squallyorbit pro sugesti studon de Dopplera efiko de observanto kaj fonto ambaŭ akcelataj.

Citaĵoj

- [1] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, (2006) <http://arxiv.org/abs/physics/0603053>
- [2] F.M. Paiva kaj A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – I*, (2007) <http://arxiv.org/abs/physics/0701092>
- [3] F.M. Paiva kaj A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efekto ĉe unuforme akcelata movo – II*, (2007) <http://arxiv.org/abs/0704.1130>
- [4] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed*, Springer-Verlag (1977)

[5] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed*, Oxford, U P (1972)