

Smooth movement of a rigid body in orientational space along the shortest path through the uniform lattice of the points on $SO(3)$

Mityushov E. A., Misyura N.E., Berestova S.A.

mityushov-e@mail.ru , n_misura@mail.ru , s.a.berestova@urfu.ru

Ural Federal University named after the first President of Russia

B.N. Yeltsin, Ekaterinburg

Abstract

We give a constructive solution for the smooth movement of a rigid body in orientational space along the shortest path. Spherical solid body motion is associated with the movement of the point on the hypersphere in four-dimensional space along the arcs of large radius through the vertices of regular four-dimensional polytope. Smooth motion is provided by a choice of special nonlinear function of quaternion interpolation. For an analytical presentation of the law of continuous movement used the original algebraic representation of the Heaviside function.

Keywords

Discrete distribution on $SO(3)$, the shortest path, regular four-dimensional polytope, the Heaviside function.

Плавное перемещение твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории через узлы однородной решетки на группе $SO(3)$

Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Берестова С.А.

mityushov-e@mail.ru , n_misura@mail.ru , s.a.berestova@urfu.ru

Уральский федеральный университет имени первого Президента России

Б.Н. Ельцина, Екатеринбург

Аннотация. Дается конструктивное решение задачи о плавном перемещении твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории, проходящей через точки пространства равномерно его заполняющие. Сферическому движению твердого тела ставится в соответствие движение точки по гиперсфере в четырехмерном пространстве по дугам большого радиуса, соединяющим вершины одного из правильных центросимметричных четырехмерных многогранников. Плавное движение обеспечивается выбором специальной нелинейной функции при интерполяции кватернионов, задающих положения вершин правильных многогранников. Для аналитического представления закона непрерывного движения используется оригинальное алгебраическое представление функции Хэвисайда.

Ключевые слова: дискретное распределение на $SO(3)$, кратчайшие траектории, четырехмерные многогранники, интерполяция кватернионов, функция Хэвисайда.

Введение

Многие задачи управления движением и навигации, робототехники и компьютерной графики связаны с описанием вращения твердого тела в трехмерном пространстве. Как известно, конфигурационным пространством этого вращения является группа Ли $SO(3)$. Положение твердого тела может быть однозначно определено с помощью кватернионов $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ с единичной нормой $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Они образуют группу $Sp(1)$ ($SO(3) \approx Sp(1)/\pm 1$). При этом трехмерная сфера единичного радиуса S^3 двулистным образом накрывает группу $SO(3)$ - кватернионам λ_i и $-\lambda_i$ соответствует один и тот же элемент из $SO(3)$ [1,2]. Наглядной иллюстрацией этого служит получение плотности совместного распределения углов Эйлера при равновероятном вращении твердого тела из равномерного распределения точек на поверхности единичной гиперсферы, выполненное в работе [3].

Так как множество случайных равновероятных вращений может быть представлено множеством точек случайным образом равномерно распределенных на поверхности трехмерной гиперсферы, то возможно перейти к равномерному дискретному распределению точек на гиперсфере, и, как следствие, равномерному дискретному заполнению пространства вращений – ориентационного пространства. Для этого могут быть использованы правильные четырехмерные центросимметричные многогранники. Вершины этих многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса, дадут дискретное равномерное распределение точек на гиперсфере и, соответственно, дискретный набор ориентаций, соответствующий равномерному заполнению пространства ориентаций.

При выполнении упорядочения вершин четырехмерных многогранников открывается путь к построению кратчайшей траектории в виде дуг большого радиуса, соединяющих эти вершины на поверхности единичной гиперсферы. Для построения закона плавного движения по соответствующей траектории в работе используется гладкая нелинейная интерполяция кватернионов.

1. Дискретное распределение точек на гиперсфере в R^4 и дискретные ориентации в R^3

Существование равномерного распределения конечного числа точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве доказывается существованием пяти центросимметричных правильных четырехмерных многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса. Этими многогранниками являются: тессеракт (16), шестнадцатичейник (8), двадцатичетырехчейник (24), двадцатичетырехчейник (600), шестисотичейник (120). В скобках указано число вершин.

При этом необходимо принимать во внимание факт двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$, связанный с

тождественностью кватернионов $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$ [1,4], а также свойства симметрии четырехмерных многогранников.

Таким образом, для моделирования дискретного набора ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, могут быть использованы вершины пяти правильных четырехмерных многогранников (тессеракта, шестнадцатичейника, двадцатичетырехчейника, стодвадцатичейника, шестисотичейника) в совокупности с процедурой отбрасывания половины вершин по условию тождественности кватернионов $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$.

В качестве примера дискретного заполнения ориентационного пространства выбраны ориентации, соответствующие вершинам двадцатичетырехчейника с координатами $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, 0, \pm 1)$, $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ [5]. После отбрасывания зеркально симметричных вершин остаются двенадцать вершин и находятся соответствующие единичные кватернионы: 1 - $\lambda^{(1)} = (1, 0, 0, 0)$, 2 - $\lambda^{(2)} = (0, 1, 0, 0)$, 3 - $\lambda^{(3)} = (0, 0, 0, 1)$, 4 - $\lambda^{(4)} = (0, 0, 0, 1)$, 5 - $\lambda^{(5)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 6 - $\lambda^{(6)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 7 - $\lambda^{(7)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 8 - $\lambda^{(8)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 9 - $\lambda^{(9)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 10 - $\lambda^{(10)} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 11 - $\lambda^{(11)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, 12 - $\lambda^{(12)} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Для упорядочения ориентаций, задаваемых этими кватернионами, определим угловые расстояния (табл. 1), задаваемые равенством

$$\vartheta_{ij} = \arccos(\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)}),$$

где $\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)} = \lambda_0^{(i)} \lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(i)} \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(i)} \lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(i)} \lambda_3^{(j)}$ - скалярное произведение кватернионов.

Таблица 1. Угловые расстояния ϑ_{ij} между дискретными ориентациями.

	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$	$\lambda^{(8)}$	$\lambda^{(9)}$	$\lambda^{(10)}$	$\lambda^{(11)}$	$\lambda^{(12)}$
$\lambda^{(1)}$	0											
$\lambda^{(2)}$	$\pi/2$	0										
$\lambda^{(3)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	0									
$\lambda^{(4)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0								
$\lambda^{(5)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0							
$\lambda^{(6)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0						
$\lambda^{(7)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0					
$\lambda^{(8)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0				
$\lambda^{(9)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	0			

$\lambda^{(10)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0		
$\lambda^{(11)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	
$\lambda^{(12)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0

Из 39 916 800 маршрутов, соединяющих двенадцать выбранных вершин двадцатичетырехячейника, можно отобрать двенадцать кратчайших. В дальнейшем используется маршрут

$$1 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4.$$

Как видно из таблицы 1, угловое расстояние между вершинами и соответствующими кватернионами в этом случае одинаковое и равно $\pi/3$.

2. Интерполяция кватернионов и закон плавное перемещение твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории

Построение кратчайшей траектории в пространстве ориентаций осуществим набором дуг большого радиуса на поверхности единичной гиперсферы, соединяющих выбранные вершины. Для построения закона плавного движения по соответствующей траектории используем гладкую нелинейную интерполяцию кватернионов, которая является обобщением метода сферической линейной интерполяции (slerp) [6]

$$\lambda(t) = \lambda^{(i)} \frac{\sin[\mathcal{G}_{ij}(1-f(t))]}{\sin \mathcal{G}_{ij}} + \lambda^{(j)} \frac{\sin[\mathcal{G}_{ij}f(t)]}{\sin \mathcal{G}_{ij}}, \quad f(t) = 6\left(\frac{t}{T}\right)^5 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 10\left(\frac{t}{T}\right)^3, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь $\lambda(t)$ - кватернионы, соответствующие точкам дуги большого радиуса на поверхности единичной гиперсферы, которая соединяет вершины (i) и (j) , T - временной интервал перемещения.

Кроме этого, для описания непрерывного плавного движения воспользуемся следующим алгебраическим представлением функции Хевисайда «ступенька вверх, ступенька вниз» [7]

$$H_{ab}(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t-a}{\sqrt{(t-a)^2}} \cdot \frac{b-t}{\sqrt{(b-t)^2}} \right] = \begin{cases} 0, & -\infty < t < a; \\ 1, & a < t < b; \\ 0, & b < t < +\infty. \end{cases}$$

Для удобства аналитического представления закона плавного движения твердого тела в ориентационном пространстве по кратчайшей траектории перенумеруем вершины двадцатичетырехячейника и соответствующие им кватернионы по правилу

$$\begin{aligned} 1 \leftrightarrow 0, \quad 12 \leftrightarrow 1, \quad 11 \leftrightarrow 2, \quad 3 \leftrightarrow 3, \quad 8 \leftrightarrow 4, \quad 10 \leftrightarrow 5, \\ 2 \leftrightarrow 6, \quad 7 \leftrightarrow 7, \quad 9 \leftrightarrow 8, \quad 6 \leftrightarrow 9, \quad 5 \leftrightarrow 10, \quad 4 \leftrightarrow 11. \end{aligned}$$

Тогда, на отрезке $t \in [0, T]$ по значениям кватернионов $\lambda_k = \lambda_k(t_k)$ в узлах t_k сетки $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$ может быть построена следующая интерполирующая функция $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{11} \left[1 + \frac{t-t_k}{\sqrt{(t-t_k)^2}} \cdot \frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{(t_{k+1}-t)^2}} \right] \cdot \left\{ \lambda^{(k)} \sin \left[\frac{\pi}{3} (1-f_k(t)) \right] + \lambda^{(k+1)} \sin \left[\frac{\pi}{3} f_k(t) \right] \right\}, \quad (1)$$

$$f_k(t) = 6 \left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^5 - 15 \left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^4 + 10 \left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^3.$$

Функциональная матрица поворота, записанная через координаты кватерниона (1), имеет вид:

$$R(t) = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_2^2(t) - 2\lambda_3^2(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 1 - 2\lambda_3^2(t) - 2\lambda_1^2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) & 1 - 2\lambda_1^2(t) - 2\lambda_2^2(t) \end{pmatrix},$$

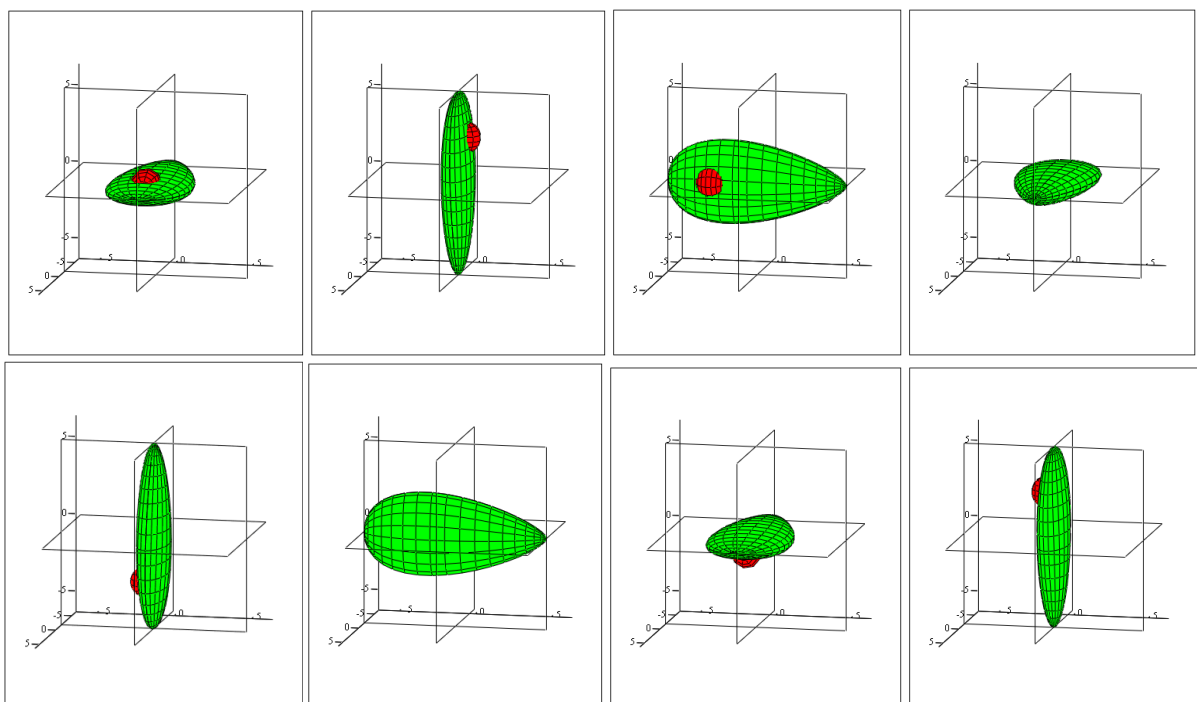
и закон плавного перемещения точек твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории, проходящей через точки пространства равномерно его заполняющие, записывается преобразованием

$$r = R(t)r_0,$$

где r_0 - радиус-вектор некоторой фиксированной точки твердого тела в начальный момент движения.

3. Иллюстрации плавных движений по кратчайшей траектории

Предложенный алгоритм нахождения закона плавного движения по кратчайшей траектории иллюстрируется с помощью 3D-анимации, выполненной с использованием компьютерной программы Mathcad [8]. На рис.1 последовательно представлены дискретные ориентации твердого тела соответствующие значениям кватернионов $\lambda_k = \lambda_k(t_k)$ в узлах t_k сетки $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$



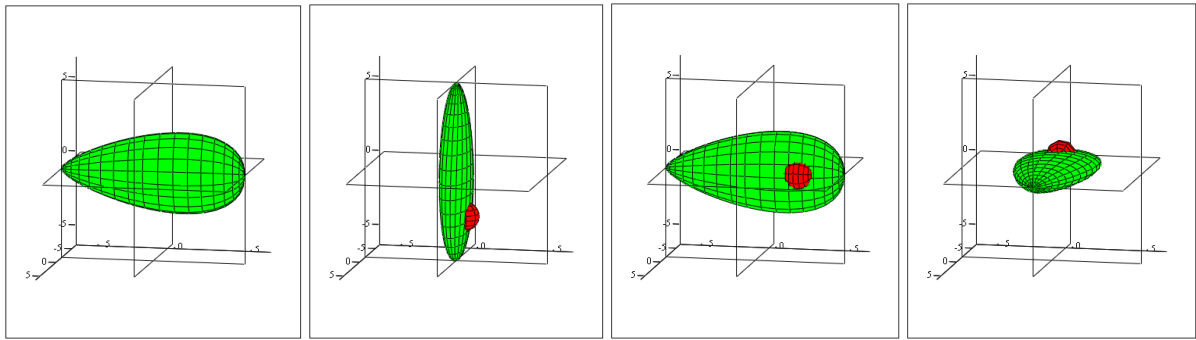


Рис. 1. Кадры двенадцати ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, из анимации плавного движения по кратчайшей траектории [8].

Плавное движение при обходе вершин двадцатичетырехячейника до их упорядочения проиллюстрированы в работе [9].

Изменение положения осей подвижной системы координат иллюстрируется движением точек на единичной двумерной сфере S^2 , координаты которых заданы тройками направляющих косинусов (Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}) , (Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}) , (Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}) . При этом матрица направляющих косинусов в кватернионом представлении имеет вид [1]:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \lambda_0^2(t) + \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) - \lambda_3^2(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & \lambda_0^2(t) - \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) - \lambda_3^2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) & \lambda_0^2(t) - \lambda_1^2(t) - \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t) \end{pmatrix}$$

На рис.2 показаны следы, оставляемые точками пересечения осей подвижной системы координат со сферой S^2 , при движении твердого тела по кратчайшей траектории.

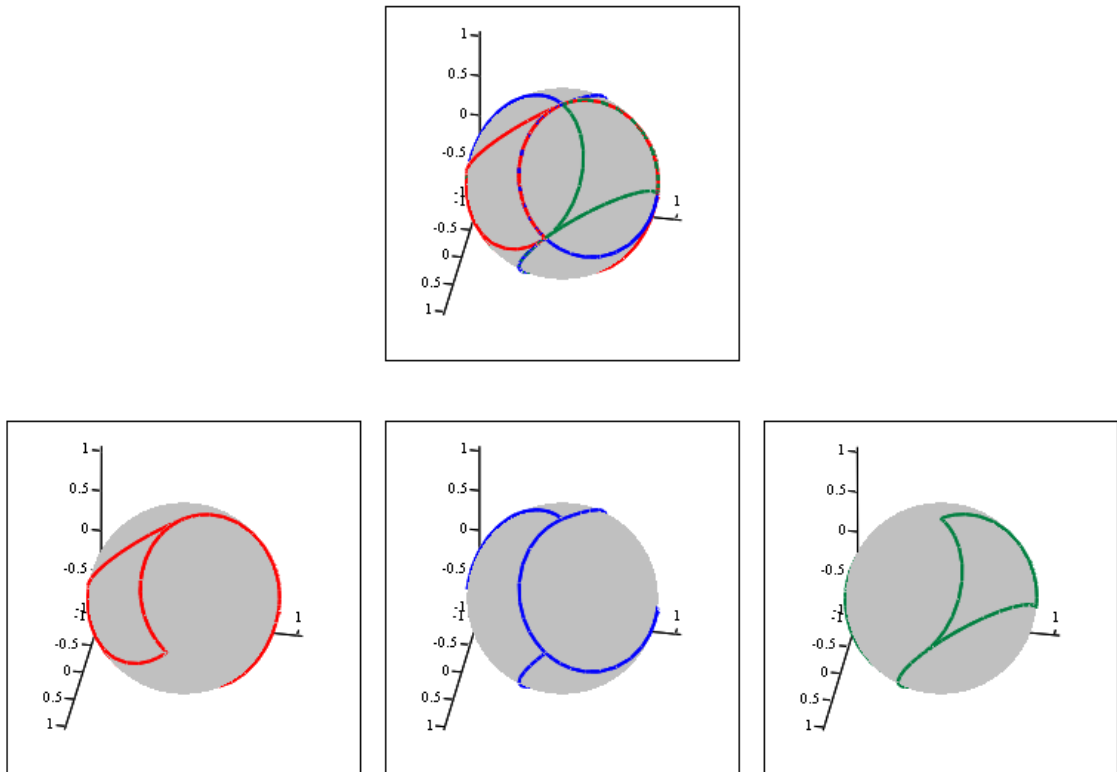


Рис. 2. Следы осей Ox_1 (красный), Ox_2 (зеленый), Ox_3 (синий) на единичной сфере.

Перемещение твердого тела по кратчайшему маршруту в ориентационном пространстве осуществляется как результат последовательных поворотов на угол $\pi/3$ вокруг осей равнонаклоненных к осям глобальной системы координат.

Заключение

Представлены результаты моделирования плавного движения твердого тела по кратчайшей траектории, проходящей через двенадцать точек конфигурационного пространства $SO(3)$ равномерно его заполняющих. При использовании сто двадцатичейника количество таких точек увеличивается до трехсот. Модели с равномерным дискретным набором возможных ориентаций могут быть использованы при решении некоторых задач управления и навигации, робототехники, компьютерной графики, вычислительной структурной биологии, астрофизики, а также при исследовании тестурообразования – возникновения преимущественной ориентации зерен поликристаллических материалов в процессе их термомеханической обработки.

Библиография

1. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 384 с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1.: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей, Изд. 6-е, М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013, 336 с.
3. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: моделирование случайных равновероятных вращений. Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015, т. 25, № 1, с. 29-35.
4. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 39, 23 с.
5. <https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell> .
6. Shoemake K.: Animating rotation with quaternion curves. In: Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '85, pp. 245–254. ACM, New York, NY, USA (1985). URL <http://doi.acm.org/10.1145/325334.325242> .
7. Mityushov E. A., Misyura N.E. Exact representation of the unit step function through algebraic functions. <http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1796>. Submitted on: Jan 21, 2017, 08:43:39.
8. https://www.youtube.com/watch?v=_k00jJIBqWY .
9. <https://www.youtube.com/watch?v=KwqQVov83jk> .