

Polymorphism of Representations of Universal Algebra

Aleks Kleyn

ABSTRACT. In this paper I consider the polymorphism of representations of universal algebra and tensor product of representations of universal algebra.

CONTENTS

1. Conventions	1
2. Polymorphism of Representations	1
3. Congruence	4
4. Tensor Product of Representations	7
5. References	12
6. Index	13
7. Special Symbols and Notations	14

1. CONVENTIONS

(1) In [4], an arbitrary operation of algebra is denoted by letter ω , and Ω is the set of operations of some universal algebra. Correspondingly, the universal algebra with the set of operations Ω is denoted as Ω -algebra. Similar notations we see in [2] with small difference that an operation in the algebra is denoted by letter f and \mathcal{F} is the set of operations. I preferred first case of notations because in this case it is easier to see where I use operation.

(2) Let A be Ω_1 -algebra. Let B be Ω_2 -algebra. Notation

$$A \xrightarrow{*} B$$

means that there is representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B .

(3) Without a doubt, the reader may have questions, comments, objections. I will appreciate any response.

2. POLYMORPHISM OF REPRESENTATIONS

Definition 2.1. Let $A_1, \dots, A_n, A, B_1, \dots, B_n, B$ be universal algebras. Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A_k \xrightarrow{*} B_k$$

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

be representation of Ω_1 -algebra A_k in Ω_2 -algebra B_k . Let

$$f : A \dashrightarrow B$$

be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . The mapping

$$r : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A \quad R : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

is called **polymorphism of representations** f_1, \dots, f_n into representation f , if, for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $x_k \in A_k$ have given value, the mapping (r, R) is a morphism of representation f_k into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n$, then we say that the mapping (r, R) is polymorphism of representation f_1 into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n = f$, then we say that the mapping (r, R) is polymorphism of representation f . \square

Theorem 2.2. *Let the mapping (r, R) be polymorphism of representations f_1, \dots, f_n into representation f . The mapping (r, R) satisfies to the equation*

$$(2.1) \quad R(f_1(a_1)(m_1), \dots, f_n(a_n)(m_n)) = f(r(a_1, \dots, a_n))(R(m_1, \dots, m_n))$$

Let $\omega_1 \in \Omega_1(p)$. For any $k, k = 1, \dots, n$, the mapping r satisfies to the equation

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & r(a_1, \dots, a_{k-1} \dots a_{k+p} \omega_1, \dots, a_n) \\ & = r(a_1, \dots, a_{k-1}, \dots, a_n) \dots r(a_1, \dots, a_{k+p}, \dots, a_n) \omega_1 \end{aligned}$$

Let $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. For any $k, k = 1, \dots, n$, the mapping R satisfies to the equation

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k+p} \omega_2, \dots, m_n) \\ & = R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k+p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

Proof. The equation (2.1) follows from the definition 2.1 and the equation [3]-(2.2.4). The equation (2.2) follows from the statement that for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $x_k \in A_k$ have given value, the mapping r is homomorphism of Ω_1 -algebra A_k into Ω_1 -algebra A . The equation (2.3) follows from the statement that for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $m_k \in B_k$ have given value, the mapping R is homomorphism of Ω_2 -algebra B_k into Ω_2 -algebra B . \square

Definition 2.3. Let A, B_1, \dots, B_n, B be universal algebras. Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

be representation of Ω_1 -algebra A_k in Ω_2 -algebra B_k . Let

$$f : A \dashrightarrow B$$

be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . The mapping

$$R : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

is called **reduced polymorphism of representations** f_1, \dots, f_n into representation f , if, for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $x_k \in A_k$ have given value, the mapping (id, R) is a morphism of representation f_k into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n$, then we say that the mapping R is reduced polymorphism of representation f_1 into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n = f$, then we say that the mapping R is reduced polymorphism of representation f . \square

Theorem 2.4. *Let the mapping R be reduced polymorphism of representations f_1, \dots, f_n into representation f . For any $k, k = 1, \dots, n$, the mapping R satisfies to the equation*

$$(2.4) \quad R(m_1, \dots, f_k(a)(m_k), \dots, m_n) = f(a)(R(m_1, \dots, m_n))$$

Let $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. For any $k, k = 1, \dots, n$, the mapping R satisfies to the equation

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k+p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k+p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

Proof. The equation (2.4) follows from the definition 2.3 and the equation [3]-(2.2.45). The equation (2.5) follows from the statement that for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $m_k \in B_k$ have given value, the mapping R is homomorphism of Ω_2 -algebra B_k into Ω_2 -algebra B . \square

We also say that the mapping (r, R) is polymorphism of representations in Ω_2 -algebras B_1, \dots, B_n into representation in Ω_2 -algebra B . Similarly, we say that the mapping R is reduced polymorphism of representations in Ω_2 -algebras B_1, \dots, B_n into representation in Ω_2 -algebra B .

Example 2.5. Polylinear mapping of vector spaces is reduced polymorphism of vector spaces. \square

Comparison of definitions 2.1 and 2.3 shows that there is a difference between these two forms of polymorphism. This is particularly evident when comparing the difference between equations (2.1) and (2.4). If we want to be able to express the reduced polymorphism of representations using polymorphism of representations, then we must require two conditions:

- (1) The representation f of universal algebra contains the identity transformation δ . Therefore, there exists $e \in A$ such that $f(e) = \delta$. Without loss of generality, we assume that the choice of $e \in A$ does not depend on whether we consider the representation f_1, \dots , or f_n .
- (2) For any $k, k = 1, \dots, n$,

$$(2.6) \quad r(a_1, \dots, a_n) = a_k \quad a_i = e \quad i \neq k$$

Then, provided that $a_i = e, i \neq k$, the equation (2.1) has form

$$(2.7) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k)(m_k), \dots, m_n) = f(r(e, \dots, a_k, \dots, e))(R(m_1, \dots, m_n))$$

It is evident that the equation (2.7) coincides with the equation (2.4).

A similar problem appears in the analysis of reduced polymorphism of representations. Consider an expression

$$(2.8) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k)(m_k), \dots, f_l(a_l)(m_l), \dots, m_n)$$

We can write the equation (2.4) in the following form

$$(2.9) \quad R(m_1, \dots, f_k(a) \circ m_k, \dots, m_n) = f(a) \circ R(m_1, \dots, m_n)$$

Using equation (2.9), we can transform the expression (2.8)

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k) \circ f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_n) \end{aligned}$$

However, in the equation (2.10), it is not evident in what order we must consider the superposition of mappings $f(a_k)$ and $f(a_l)$. Moreover, not every Ω_1 -algebra A has such a which depends on a_k and a_l and satisfies to equation¹

$$f(a) = f(a_k) \circ f(a_l)$$

The necessity of the above requirements becomes more evident, if we consider the following theorem.

Theorem 2.6. *Let R be reduced polymorphism of representations f_1, \dots, f_n into representation f . Then for any $k, l, k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n$,*

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_l(a) \circ m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_k, \dots, f_l(a) \circ m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

Proof. The equation (2.11) directly follows from the equation (2.9). \square

Therefore, hereinafter we will require the existence of identity mapping in the representation f and the existence of the mapping r , satisfying the equation (2.6).

3. CONGRUENCE

Theorem 3.1. *Let N be equivalence on the set A . Let us consider category \mathcal{A} whose objects are mappings²*

$$\begin{aligned} f_1 : A &\rightarrow S_1 & \ker f_1 &\supseteq N \\ f_2 : A &\rightarrow S_2 & \ker f_2 &\supseteq N \end{aligned}$$

We define morphism $f_1 \rightarrow f_2$ to be mapping $h : S_1 \rightarrow S_2$ making following diagram commutative

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow f_1 & \downarrow h \\ A & & \\ & \searrow f_2 & \downarrow \\ & & S_2 \end{array}$$

The mapping

$$\text{nat } N : A \rightarrow A/N$$

is universally repelling in the category \mathcal{A} .³

¹If in Ω_1 -algebra there is commutative product with unit, and the representation f satisfies to the equation

$$f(ab) = f(a) \circ f(b)$$

then we assume

$$r(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$$

²The statement of lemma is similar to the statement on p. [1]-119.

³See definition of universal object of category in definition on p. [1]-57.

Proof. Consider diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & & A/N \\
 & \nearrow^{j=\text{nat } N} & \downarrow h \\
 A & & S \\
 & \searrow f &
 \end{array}$$

$$(3.1) \quad \ker f \supseteq N$$

From the statement (3.1) and the equation

$$j(a_1) = j(a_2)$$

it follows that

$$f(a_1) = f(a_2)$$

Therefore, we can uniquely define the mapping h using the equation

$$h(j(b)) = f(b)$$

□

Theorem 3.2. *Let*

$$f : A \dashrightarrow B$$

*be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . Let N be such congruence⁴ on Ω_2 -algebra B that any transformation $h \in {}^*B$ is coordinated with congruence N . There exists representation*

$$f_1 : A \dashrightarrow B/N$$

of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B/N and the mapping

$$\text{nat } N : B \rightarrow B/N$$

is morphism of representation f into the representation f_1

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{j} & B/N & j = \text{nat } N \\
 & \swarrow f^* & \nearrow f_1^* & \\
 & & A &
 \end{array}$$

Proof. We can represent any element of the set B/N as $j(a)$, $a \in B$.

According to the theorem [4]-II.3.5, there exists a unique Ω_2 -algebra structure on the set B/N . If $\omega \in \Omega_2(p)$, then we define operation ω on the set B/N according to the equation (3) on page [4]-59

$$(3.2) \quad j(b_1) \dots j(b_p) \omega = j(b_1 \dots b_p \omega)$$

As well as in the proof of the theorem [3]-2.2.15, we can define the representation

$$f_1 : A \dashrightarrow B/N$$

using equation

$$(3.3) \quad f_1(a)(j(b)) = j(f(a)(b))$$

⁴See the definition of congruence on p. [4]-57.

We can represent the equation (3.3) using diagram

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ f(a) \uparrow & & \uparrow f_1(a) \\ B & \xrightarrow{j} & B/N \end{array}$$

Let $\omega \in \Omega_2(p)$. Since the mappings $f(a)$ and j are homomorphisms of Ω_2 -algebra, then

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f_1(a)(j(b_1)\dots j(b_p)\omega) &= f_1(a)(j(b_1\dots b_p)\omega) \\ &= j(f(a)(b_1\dots b_p)\omega) \\ &= j((f(a)(b_1))\dots(f(a)(b_p))\omega) \\ &= j(f(a)(b_1))\dots j(f(a)(b_p))\omega \\ &= (f_1(a)(j(b_1)))\dots(f_1(a)(j(b_p)))\omega \end{aligned}$$

From the equation (3.5), it follows that the mapping $f_1(a)$ is homomorphism of Ω_2 -algebra. From the equation (3.3) it follows that the mapping j is morphism of the representation f into the representation f_1 . \square

Theorem 3.3. *Let*

$$f : A \dashrightarrow B$$

*be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . Let N be such congruence on Ω_2 -algebra B that any transformation $h \in {}^*B$ is coordinated with congruence N . Let us consider category \mathcal{A} whose objects are morphisms of representations⁵*

$$\begin{aligned} R_1 : B &\rightarrow S_1 \quad \ker R_1 \supseteq N \\ R_2 : B &\rightarrow S_2 \quad \ker R_2 \supseteq N \end{aligned}$$

where S_1, S_2 are Ω_2 -algebras and

$$g_1 : A \dashrightarrow S_1 \quad g_2 : A \dashrightarrow S_2$$

are representations of Ω_1 -algebra A . We define morphism $R_1 \rightarrow R_2$ to be morphism of representations $h : S_1 \rightarrow S_2$ making following diagram commutative

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow^{g_1} & \uparrow \\ A & \dashrightarrow^f & B \\ & \searrow_{g_2} & \downarrow \\ & & S_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow R_1 \\ \downarrow R_2 \\ \downarrow h \end{array}$$

The morphism $\text{nat } N$ of representation f into representation f_1 (the theorem 3.2) is universally repelling in the category \mathcal{A} .⁶

⁵The statement of lemma is similar to the statement on p. [1]-119.

⁶See definition of universal object of category in definition on p. [1]-57.

Proof. From the theorem 3.1, it follows that there exists and unique the mapping h for which the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc}
 & & B/N \quad j = \text{nat } N \quad \ker R \supseteq N \\
 & \nearrow^{f_1} & \uparrow j \\
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow_g & \downarrow h \\
 & & S
 \end{array}$$

Therefore, we can uniquely define the mapping h using equation

$$(3.6) \quad h(j(b)) = R(b)$$

Let $\omega \in \Omega_2(p)$. Since mappings R and j are homomorphisms of Ω_2 -algebra, then

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad h(j(b_1) \dots j(b_p)\omega) &= h(j(b_1 \dots b_p)\omega) \\
 &= R(b_1 \dots b_p)\omega \\
 &= R(b_1) \dots R(b_p)\omega \\
 &= h(j(b_1)) \dots h(j(b_p))\omega
 \end{aligned}$$

From the equation (3.7) it follows that the mapping h is homomorphism of Ω_2 -algebra.

Since the mapping R is morphism of the representation f into the representation g , then the following equation is satisfied

$$(3.8) \quad g(a)(R(b)) = R(f(a)(b))$$

From the equation (3.6) it follows that

$$(3.9) \quad g(a)(h(j(b))) = g(a)(R(b))$$

From the equations (3.8), (3.9) it follows that

$$(3.10) \quad g(a)(h(j(b))) = R(f(a)(b))$$

From the equations (3.6), (3.10) it follows that

$$(3.11) \quad g(a)(h(j(b))) = h(j(f(a)(b)))$$

From the equations (3.3), (3.11) it follows that

$$(3.12) \quad g(a)(h(j(b))) = h(f_1(a)(j(b)))$$

From the equation (3.12) it follows that the mapping h is morphism of representation f_1 into the representation g . \square

4. TENSOR PRODUCT OF REPRESENTATIONS

Definition 4.1. Let A, B_1, \dots, B_n be universal algebras.⁷ Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

⁷I give definition of tensor product of representations of universal algebra following to definition in [1], p. 601 - 603.

be representation of Ω_1 -algebra A_k in Ω_2 -algebra B_k . Let us consider category \mathcal{A} whose objects are reduced polymorphisms of representations f_1, \dots, f_n

$$R_1 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_1 \quad R_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_2$$

where S_1, S_2 are Ω_2 -algebras and

$$g_1 : A \dashrightarrow S_1 \quad g_2 : A \dashrightarrow S_2$$

are representations of Ω_1 -algebra A . We define morphism $g_1 \rightarrow g_2$ to be morphism of representations $h : S_1 \rightarrow S_2$ making following diagram commutative

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow^{g_1} & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & & \\ & \searrow_{g_2} & S_2 \end{array}$$

Universal object $B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ of category \mathcal{A} is called **tensor product of representations** B_1, \dots, B_n . \square

Definition 4.2. Tensor product

$$B^{\otimes n} = B_1 \otimes \dots \otimes B_n \quad B_1 = \dots = B_n = B$$

is called **tensor power of representation** B . \square

Theorem 4.3. *There exists tensor product of representations.*

Proof. Let

$$f : A \dashrightarrow M$$

be representation of Ω_1 -algebra A generated by product $B_1 \times \dots \times B_n$ of Ω_2 -algebras B_1, \dots, B_n (the theorem [3]-3.1.4). Injection

$$i : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow M$$

is defined according to rule

$$(4.1) \quad i \circ (b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

Let N be equivalence generated by following equations

$$(4.2) \quad (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n) \omega$$

$$(4.3) \quad (b_1, \dots, f_i(a)(b_i), \dots, b_n) = f(a)((b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))$$

$$b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i-1}, \dots, b_{i,p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A$$

- Let us prove the following lemma

Lemma 4.4. For any $c \in A$, endomorphism $f(c)$ of Ω_2 -algebra M is coordinated with equivalence N .

- Let $\omega \in \Omega_2(p)$. From the equation (4.3), it follows that

$$(4.4) \quad f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) = (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega), \dots, b_n)$$

Since $f_i(c)$ is endomorphism of Ω_2 -algebra B_i , then from the equation (4.4), it follows that

$$(4.5) \quad f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) = (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-1}) \dots f_i(c)(b_{i-p}) \omega, \dots, b_n)$$

From equations (4.5), (4.2), it follows that

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-1}), \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-p}), \dots, b_n) \omega \end{aligned}$$

From equations (4.6), (4.3), it follows that

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= f(c)((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots f(c)((b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

Since $f_i(c)$ is endomorphism of Ω_2 -algebra B_i , then from the equation (4.7), it follows that

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= f(c)((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots (b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n) \omega \end{aligned}$$

Therefore, we proved the following statement.

Lemma 4.5. The equation (4.8) follows from the equation (4.2).

- The following statement follows from the equation (4.3).

Lemma 4.6. The equation

$$(4.9) \quad f(c)((b_1, \dots, f_i(a)(b_i), \dots, b_n)) = f(c)(f(a)((b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)))$$

follows from the equation (4.3).

- The lemma 4.4 follows from lemmas 4.5, 4.6 and definition [3]-2.2.13.

From the lemma 4.4 and the theorem [3]-2.2.14, it follows that Ω_1 -algebra is defined on the set $*M/N$. Consider diagram

$$\begin{array}{ccc} & M/N & \xrightarrow{F(a)} & M/N & j = \text{nat } N \\ & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \\ A & & & & \\ & \downarrow & \searrow & \downarrow & \\ & M & \xrightarrow{f(a)} & M & \end{array}$$

According to lemma 4.4, from the condition

$$j(b_1) = j(b_2)$$

it follows that

$$j(f(a)(b_1)) = j(f(a)(b_2))$$

Therefore, transformation $F(a)$ is well defined and

$$(4.10) \quad F(a) \circ j = j \circ f(a)$$

If $\omega \in \Omega_1(p)$, then we assume

$$(F(a_1)\dots F(a_p)\omega)(J(b)) = J((f(a_1)\dots f(a_p)\omega)(b))$$

Therefore, mapping F is representations of Ω_1 -algebra A . From (4.10) it follows that (id, j) is morphism of representations f and F .

Consider commutative diagram

$$(4.11) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow^{g_1} & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow_j & \end{array}$$

From equations (4.1), (4.2), (4.3), it follows that

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & g_1((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= g_1((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots g_1((b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} & g_1((b_1, \dots, f_i(a)(b_i), \dots, b_n)) \\ &= f(a)(g_1((b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))) \end{aligned}$$

From equations (4.12) and (4.13) it follows that map g_1 is reduced polymorphism of representations f_1, \dots, f_n .

Since $B_1 \times \dots \times B_n$ is the basis of representation M of Ω_1 algebra A , then, according to the theorem [3]-3.2.7, for any representation

$$A \xrightarrow{*} V$$

and any reduced polymorphism

$$g_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow V$$

there exists a unique morphism of representations $k : M \rightarrow V$, for which following diagram is commutative

$$(4.14) \quad \begin{array}{ccc} B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow_{g_2} & \searrow_k \\ & & V \end{array}$$

Since g_2 is reduced polymorphism, then $\ker k \supseteq N$.

According to the theorem 3.3, map j is universal in the category of morphisms of representation f whose kernel contains N . Therefore, we have morphism of representations

$$h : M/N \rightarrow V$$

which makes the following diagram commutative

$$(4.15) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow j & \downarrow h \\ M & & \\ & \searrow k & \\ & & V \end{array}$$

We join diagrams (4.11), (4.14), (4.15), and get commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & & & M/N \\ & & & \nearrow g_1 & \downarrow h \\ & & & M & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & & & \\ & & & \searrow k & \\ & & & & V \\ & & & \nwarrow g_2 & \end{array}$$

Since $\text{Im } g_1$ generates M/N , than map h is uniquely determined. □

According to proof of theorem 4.3

$$B_1 \otimes \dots \otimes B_n = M/N$$

If $d_i \in A_i$, we write

$$(4.16) \quad j \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Theorem 4.7. Let B_1, \dots, B_n be Ω_2 -algebras. Let

$$f : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_n$$

be reduced polymorphism defined by equation

$$(4.17) \quad f \circ (b_1, \dots, b_n) = b_1 \otimes \dots \otimes b_n$$

Let

$$g : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow V$$

be reduced polymorphism into Ω -algebra V . There exists morphism of representations

$$h : B_1 \otimes \dots \otimes B_n \rightarrow V$$

such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} & & B_1 \otimes \dots \otimes B_n \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & & \\ & \searrow g & \\ & & V \end{array}$$

is commutative.

Proof. Equation (4.17) follows from equations (4.1) and (4.16). An existence of the mapping h follows from the definition 4.1 and constructions made in the proof of the theorem 4.3. \square

We can write equations (4.12) and (4.13) as

$$(4.18) \quad \begin{aligned} & b_1 \otimes \dots \otimes (b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega) \otimes \dots \otimes b_n \\ & = (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i-1} \otimes \dots \otimes b_n) \dots (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i-p} \otimes \dots \otimes b_n) \omega \end{aligned}$$

$$(4.19) \quad \begin{aligned} & b_1 \otimes \dots \otimes (f_i(a)(b_i)) \otimes \dots \otimes b_n = f(a)(b_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes b_n) \\ & b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i-1}, \dots, b_{i-p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A \end{aligned}$$

5. REFERENCES

- [1] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002
- [2] S. Burris, H.P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag (March, 1982),
eprint <http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html>
(The Millennium Edition)
- [3] Aleks Kleyn, Representation Theory: Representation of Universal Algebra, Lambert Academic Publishing, 2011
- [4] Paul M. Cohn, Universal Algebra, Springer, 1981

6. INDEX

polymorphism of representations 2
reduced polymorphism of representations 2
tensor power of representation 8
tensor product of representations 8
tensor product of representations 8

7. SPECIAL SYMBOLS AND NOTATIONS

$B^{\otimes n}$ tensor power of representation **8**

$B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ tensor product of
representations **8**

Полиморфизм представлений универсальной алгебры

Александр Клейн

Аннотация. В статье я рассматриваю полиморфизм представлений универсальной алгебры и тензорное произведение представлений универсальной алгебры.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Соглашения	1
2. Полиморфизм представлений	1
3. Конгруэнция	4
4. Тензорное произведение представлений	8
5. Список литературы	12
6. Предметный указатель	13
7. Специальные символы и обозначения	14

1. СОГЛАШЕНИЯ

- (1) В [4] произвольная операция алгебры обозначена буквой ω , и Ω - множество операций некоторой универсальной алгебры. Соответственно, универсальная алгебра с множеством операций Ω обозначается Ω -алгебра. Аналогичные обозначения мы видим в [2] с той небольшой разницей, что операция в алгебре обозначена буквой f и \mathcal{F} - множество операций. Я выбрал первый вариант обозначений, так как в этом случае легче видно, где я использую операцию.
- (2) Пусть A - Ω_1 -алгебра. Пусть B - Ω_2 -алгебра. Запись

$$A \xrightarrow{*} B$$

означает, что определено представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B .

- (3) Без сомнения, у читателя могут быть вопросы, замечания, возражения. Я буду признателен любому отзыву.

2. ПОЛИМОРФИЗМ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Определение 2.1. Пусть $A_1, \dots, A_n, A, B_1, \dots, B_n, B$ - универсальные алгебры. Пусть для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A_k \xrightarrow{*} B_k$$

Aleks_Kleyn@MailAPS.org.
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>.
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1.
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>.

представление Ω_1 -алгебры A_k в Ω_2 -алгебре B_k . Пусть

$$f : A \dashrightarrow B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Отображение

$$r : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A \quad R : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

называется **полиморфизмом представлений** f_1, \dots, f_n в представление f , если для любого $k, k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $x_k \in A_k$ имеют заданное значение, отображение (r, R) является морфизмом представления f_k в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n$, то мы будем говорить, что отображение (r, R) является полиморфизмом представления f_1 в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n = f$, то мы будем говорить, что отображение (r, R) является полиморфизмом представления f . \square

Теорема 2.2. Пусть отображение (r, R) является полиморфизмом представлений f_1, \dots, f_n в представление f . Отображение (r, R) удовлетворяет равенству

$$(2.1) \quad R(f_1(a_1)(m_1), \dots, f_n(a_n)(m_n)) = f(r(a_1, \dots, a_n))(R(m_1, \dots, m_n))$$

Пусть $\omega_1 \in \Omega_1(p)$. Для любого $k, k = 1, \dots, n$, отображение r удовлетворяет равенству

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & r(a_1, \dots, a_{k \cdot 1} \dots a_{k \cdot p} \omega_1, \dots, a_n) \\ &= r(a_1, \dots, a_{k \cdot 1}, \dots, a_n) \dots r(a_1, \dots, a_{k \cdot p}, \dots, a_n) \omega_1 \end{aligned}$$

Пусть $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. Для любого $k, k = 1, \dots, n$, отображение R удовлетворяет равенству

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k \cdot 1} \dots m_{k \cdot p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k \cdot 1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k \cdot p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

Доказательство. Равенство (2.1) следует из определения 2.1 и равенства [3]-(2.2.4). Равенство (2.2) следует из утверждения, что для любого $k, k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $x_k \in A_k$ имеют заданное значение, отображение r является гомоморфизмом Ω_1 -алгебры A_k в Ω_1 -алгебру A . Равенство (2.3) следует из утверждения, что для любого $k, k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $m_k \in B_k$ имеют заданное значение, отображение R является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры B_k в Ω_2 -алгебру B . \square

Определение 2.3. Пусть A, B_1, \dots, B_n, B - универсальные алгебры. Пусть для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

представление Ω_1 -алгебры A_k в Ω_2 -алгебре B_k . Пусть

$$f : A \dashrightarrow B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Отображение

$$R : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

называется **приведенным полиморфизмом представлений** f_1, \dots, f_n в представление f , если для любого $k, k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $x_k \in A_k$ имеют заданное значение, отображение (id, R) является морфизмом представления f_k в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n$, то мы будем говорить, что отображение R является приведенным полиморфизмом представления f_1 в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n = f$, то мы будем говорить, что отображение R является приведенным полиморфизмом представления f . \square

Теорема 2.4. Пусть отображение R является приведенным полиморфизмом представлений f_1, \dots, f_n в представление f . Для любого $k, k = 1, \dots, n$, отображение R удовлетворяет равенству

$$(2.4) \quad R(m_1, \dots, f_k(a)(m_k), \dots, m_n) = f(a)(R(m_1, \dots, m_n))$$

Пусть $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. Для любого $k, k = 1, \dots, n$, отображение R удовлетворяет равенству

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k,p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k,p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

Доказательство. Равенство (2.4) следует из определения 2.3 и равенства [3]-(2.2.45). Равенство (2.5) следует из утверждения, что для любого $k, k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $m_k \in B_k$ имеют заданное значение, отображение R является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры B_k в Ω_2 -алгебру B . \square

Мы также будем говорить, что отображение (r, R) является полиморфизмом представлений в Ω_2 -алгебрах B_1, \dots, B_n в представление в Ω_2 -алгебре B . Аналогично, мы будем говорить, что отображение R является приведенным полиморфизмом представлений в Ω_2 -алгебрах B_1, \dots, B_n в представление в Ω_2 -алгебре B .

Пример 2.5. Полилинейное отображение векторных пространств является приведенным полиморфизмом векторных пространств. \square

Сравнение определений 2.1 и 2.3 показывает, что существует разница между этими двумя формами полиморфизма. Особенно хорошо это различие видно при сравнении равенств (2.1) и (2.4). Если мы хотим иметь возможность выразить приведенный полиморфизм представлений через полиморфизм представлений, то мы должны потребовать, два условия:

- (1) Представление f универсальной алгебры содержит тождественное преобразование δ . Следовательно, существует $e \in A$ такой, что $f(e) = \delta$. Не нарушая общности, мы положим, что выбор $e \in A$ не зависит от того, какое представление f_1, \dots, f_n мы рассматриваем.
- (2) Для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$(2.6) \quad r(a_1, \dots, a_n) = a_k \quad a_i = e \quad i \neq k$$

Тогда, при условии $a_i = e, i \neq k$, равенство (2.1) имеет вид

$$(2.7) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k)(m_k), \dots, m_n) = f(r(e, \dots, a_k, \dots, e))(R(m_1, \dots, m_n))$$

Очевидно, что равенство (2.7) совпадает с равенством (2.4).

Похожая задача появляется при анализе приведенного полиморфизма представлений. Рассмотрим выражение

$$(2.8) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k)(m_k), \dots, f_l(a_l)(m_l), \dots, m_n)$$

Мы можем записать равенство (2.4) в виде

$$(2.9) \quad R(m_1, \dots, f_k(a) \circ m_k, \dots, m_n) = f(a) \circ R(m_1, \dots, m_n)$$

Пользуясь равенством (2.9), мы можем преобразовать выражение (2.8)

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k) \circ f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_n) \end{aligned}$$

Однко в равенстве (2.10) не очевидно, в каком порядке мы должны рассматривать суперпозицию отображений $f(a_k)$ и $f(a_l)$. Кроме того, не всякая Ω_1 -алгебра A имеет такой a (зависящий от a_k и a_l), что¹

$$f(a) = f(a_k) \circ f(a_l)$$

Необходимость указанных выше требований становится более очевидной, если мы рассмотрим следующую теорему.

Теорема 2.6. Пусть R - приведенный полиморфизм представлений f_1, \dots, f_n в представление f . Тогда для любых $k, l, k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n$,

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_l(a) \circ m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_k, \dots, f_l(a) \circ m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

Доказательство. Равенство (2.11) непосредственно следует из равенства (2.9). \square

Поэтому в дальнейшем мы будем требовать существование тождественного отображения в представлении f и существование отображения r , удовлетворяющего равенству (2.6).

3. КОНГРУЭНЦИЯ

Теорема 3.1. Пусть N - отношение эквивалентности на множестве A . Рассмотрим категорию \mathcal{A} объектами которой являются отображения²

$$\begin{aligned} f_1 : A &\rightarrow S_1 \quad \ker f_1 \supseteq N \\ f_2 : A &\rightarrow S_2 \quad \ker f_2 \supseteq N \end{aligned}$$

¹Если в Ω_1 -алгебре определено коммутативное произведение с единицей, а представление f удовлетворяет равенству

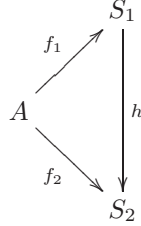
$$f(ab) = f(a) \circ f(b)$$

то мы положим

$$r(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$$

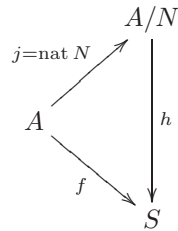
²Утверждение леммы аналогично утверждению на с. [1]-94.

Мы определим морфизм $f_1 \rightarrow f_2$ как отображение $h : S_1 \rightarrow S_2$, для которого коммутативна диаграмма



Отображение h является универсально отталкивающим в категории \mathcal{A} .³

Доказательство. Рассмотрим диаграмму



$$(3.1) \quad \ker f \supseteq N$$

Из утверждения (3.1) и равенства

$$j(a_1) = j(a_2)$$

следует

$$f(a_1) = f(a_2)$$

Следовательно, мы можем однозначно определить отображение h с помощью равенства

$$h(j(b)) = f(b)$$

□

Теорема 3.2. Пусть

$$f : A \dashrightarrow B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Пусть N - такая конгруэнция⁴ на Ω_2 -алгебре B , что любое преобразование $h \in {}^*B$ согласованно с конгруэнцией N . Существует представление

$$f_1 : A \dashrightarrow B/N$$

Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B/N и отображение

$$\text{nat } N : B \rightarrow B/N$$

³Определение универсального объекта смотри в определении на с. [1]-47.

⁴Смотри определение конгруэнции на с. [4]-71.

является морфизмом представления f в представление f_1

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ & \swarrow^* f & \nearrow^* f_1 \\ & A & \end{array} \quad j = \text{nat } N$$

Доказательство. Любой элемент множества B/N мы можем представить в виде $j(a)$, $a \in B$.

Согласно теореме [4]-II.3.5, мы можем определить единственную структуру Ω_2 -алгебры на множестве B/N . Если $\omega \in \Omega_2(p)$, то мы определим операцию ω на множестве B/N согласно равенству (3) на странице [4]-73

$$(3.2) \quad j(b_1) \dots j(b_p) \omega = j(b_1 \dots b_p \omega)$$

Также как в доказательстве теоремы [3]-2.2.15, мы можем определить представление

$$f_1 : A \dashrightarrow B/N$$

с помощью равенства

$$(3.3) \quad f_1(a)(j(b)) = j(f(a)(b))$$

Равенство (3.3) можно представить с помощью диаграммы

$$(3.4) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ f(a) \uparrow & & \uparrow f_1(a) \\ B & \xrightarrow{j} & B/N \end{array}$$

Пусть $\omega \in \Omega_2(p)$. Так как отображения $f(a)$ и j являются гомоморфизмами Ω_2 -алгебры, то

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f_1(a)(j(b_1) \dots j(b_p) \omega) &= f_1(a)(j(b_1 \dots b_p \omega)) \\ &= j(f(a)(b_1 \dots b_p \omega)) \\ &= j((f(a)(b_1)) \dots (f(a)(b_p)) \omega) \\ &= j(f(a)(b_1)) \dots j(f(a)(b_p)) \omega \\ &= (f_1(a)(j(b_1))) \dots (f_1(a)(j(b_p))) \omega \end{aligned}$$

Из равенства (3.5) следует, что отображение $f_1(a)$ является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры. Из равенства (3.3) следует, что отображение j является морфизмом представления f в представление f_1 . \square

Теорема 3.3. Пусть

$$f : A \dashrightarrow B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Пусть N - такая конгруэнция на Ω_2 -алгебре B , что любое преобразование $h \in {}^*B$ согласованно с конгруэнцией N . Рассмотрим категорию \mathcal{A} объектами которой являются морфизмы представлений⁵

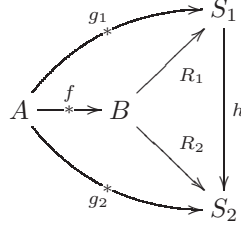
$$\begin{aligned} R_1 : B &\rightarrow S_1 \quad \ker R_1 \supseteq N \\ R_2 : B &\rightarrow S_2 \quad \ker R_2 \supseteq N \end{aligned}$$

⁵Утверждение леммы аналогично утверждению на с. [1]-94.

где S_1, S_2 - Ω_2 -алгебры и

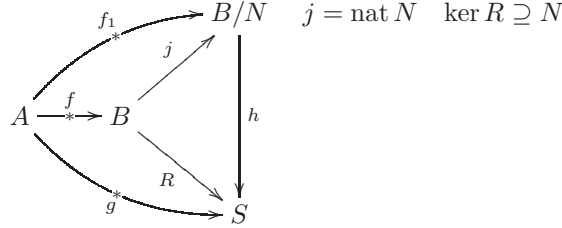
$$g_1 : A \dashrightarrow S_1 \quad g_2 : A \dashrightarrow S_2$$

представления Ω_1 -алгебры A . Мы определим морфизм $R_1 \rightarrow R_2$ как морфизм представлений $h : S_1 \rightarrow S_2$, для которого коммутативна диаграмма



Морфизм $\text{nat } N$ представления f в представлении f_1 (теорема 3.2) является универсально отталкивающим в категории \mathcal{A} .⁶

Доказательство. Существование и единственность отображения h , для которого коммутативна диаграмма



следует из теоремы 3.1. Следовательно, мы можем однозначно определить отображение h с помощью равенства

$$(3.6) \quad h(j(b)) = R(b)$$

Пусть $\omega \in \Omega_2(p)$. Так как отображения R и j являются гомоморфизмами Ω_2 -алгебры, то

$$(3.7) \quad \begin{aligned} h(j(b_1) \dots j(b_p)\omega) &= h(j(b_1 \dots b_p)\omega) \\ &= R(b_1 \dots b_p)\omega \\ &= R(b_1) \dots R(b_p)\omega \\ &= h(j(b_1)) \dots h(j(b_p))\omega \end{aligned}$$

следует, что отображение h является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры.

Так как отображение R является морфизмом представления f в представлении g , то верно равенство

$$(3.8) \quad g(a)(R(b)) = R(f(a)(b))$$

Из равенства (3.6) следует

$$(3.9) \quad g(a)(h(j(b))) = g(a)(R(b))$$

Из равенств (3.8), (3.9) следует

$$(3.10) \quad g(a)(h(j(b))) = R(f(a)(b))$$

⁶Определение универсального объекта смотри в определении на с. [1]-47.

Из равенств (3.6), (3.10) следует

$$(3.11) \quad g(a)(h(j(b))) = h(j(f(a)(b)))$$

Из равенств (3.3), (3.11) следует

$$(3.12) \quad g(a)(h(j(b))) = h(f_1(a)(j(b)))$$

Из равенства (3.12) следует, что отображение h является морфизмом представления f_1 в представление g . \square

4. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Определение 4.1. Пусть A, B_1, \dots, B_n - универсальные алгебры.⁷ Пусть для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

представление Ω_1 -алгебры A_k в Ω_2 -алгебре B_k . Рассмотрим категорию \mathcal{A} объектами которой являются приведенные полиморфизмы представлений f_1, \dots, f_n

$$R_1 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_1 \quad R_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_2$$

где S_1, S_2 - Ω_2 -алгебры и

$$g_1 : A \dashrightarrow S_1 \quad g_2 : A \dashrightarrow S_2$$

представления Ω_1 -алгебры A . Мы определим морфизм $g_1 \rightarrow g_2$ как морфизм представлений $h : S_1 \rightarrow S_2$, для которого коммутирует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow^{g_1} & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & & \\ & \searrow_{g_2} & S_2 \end{array}$$

Универсальный объект $B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ категории \mathcal{A} называется **тензорным произведением представлений** B_1, \dots, B_n . \square

Определение 4.2. Тензорное произведение

$$B^{\otimes n} = B_1 \otimes \dots \otimes B_n \quad B_1 = \dots = B_n = B$$

называется **тензорной степенью представления** B . \square

Теорема 4.3. Тензорное произведение представлений существует.

Доказательство. Пусть

$$f : A \dashrightarrow M$$

представление Ω_1 -алгебры A , порождённое произведением $B_1 \times \dots \times B_n$ Ω_2 -алгебр B_1, \dots, B_n (теорема [3]-3.1.4). Инъекция

$$i : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow M$$

⁷Я определяю тензорное произведение представлений универсальной алгебры по аналогии с определением в [1], с. 456 - 458.

определена по правилу

$$(4.1) \quad i \circ (b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

Пусть N - отношение эквивалентности, порождённое равенствами

$$(4.2) \quad (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n) \omega$$

$$(4.3) \quad (b_1, \dots, f_i(a)(b_i), \dots, b_n) = f(a)((b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))$$

$$b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i-1}, \dots, b_{i-p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A$$

- Докажем следующую лемму.

Лемма 4.4. Для любого $c \in A$ эндоморфизм $f(c)$ Ω_2 -алгебры M согласовано с эквивалентностью N .

- Пусть $\omega \in \Omega_2(p)$. Из равенства (4.3) следует

$$(4.4) \quad f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) = (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega), \dots, b_n)$$

Так как $f_i(c)$ - эндоморфизм Ω_2 -алгебры B_i , то из равенства (4.4) следует

$$(4.5) \quad f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) = (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-1}) \dots f_i(c)(b_{i-p}) \omega, \dots, b_n)$$

Из равенств (4.5), (4.2) следует

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-1}), \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, f_i(c)(b_{i-p}), \dots, b_n) \omega \end{aligned}$$

Из равенств (4.6), (4.3) следует

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= f(c)((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots f(c)((b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

Так как $f_i(c)$ - эндоморфизм Ω_2 -алгебры B_i , то из равенства (4.7) следует

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & f(c)((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= f(c)((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots (b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n) \omega \end{aligned}$$

Следовательно, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 4.5. Равенство (4.8) следует из равенства (4.2).

- Следующее утверждение следует из равенства (4.3).

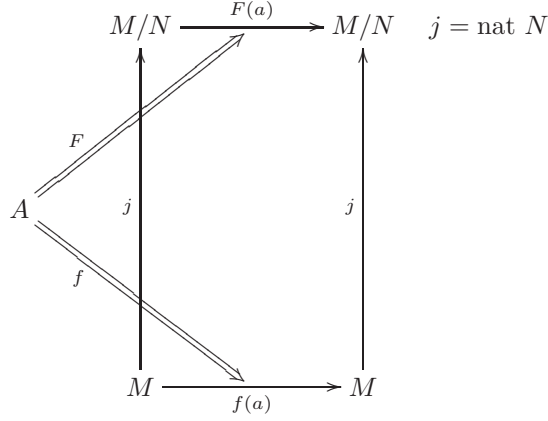
Лемма 4.6. Равенство

$$(4.9) \quad f(c)((b_1, \dots, f_i(a)(b_i), \dots, b_n)) = f(c)(f(a)((b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)))$$

следует из равенства (4.3).

- Из лемм 4.5, 4.6 и определения [3]-2.2.13 следует лемма 4.4.

Из леммы 4.4 и теоремы [3]-2.2.14 следует, что на множестве ${}^*M/N$ определена Ω_1 -алгебра. Рассмотрим диаграмму



Согласно лемме 4.4, из условия

$$j(b_1) = j(b_2)$$

следует

$$j(f(a)(b_1)) = j(f(a)(b_2))$$

Следовательно, преобразование $F(a)$ определено корректно и

$$(4.10) \quad F(a) \circ j = j \circ f(a)$$

Если $\omega \in \Omega_1(p)$, то мы положим

$$(F(a_1) \dots F(a_p) \omega)(J(b)) = J((f(a_1) \dots f(a_p) \omega)(b))$$

Следовательно, отображение F является представлением Ω_1 -алгебры A . Из (4.10) следует, что (id, j) является морфизмом представлений f и F .

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(4.11) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow^{g_1} & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow_j & \end{array}$$

Из равенств (4.1), (4.2), (4.3) следует

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & g_1((b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n)) \\ &= g_1((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots g_1((b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} & g_1((b_1, \dots, f_i(a)(b_i), \dots, b_n)) \\ &= f(a)(g_1((b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))) \end{aligned}$$

Из равенств (4.12) и (4.13) следует, что отображение g_1 является приведенным полиморфизмом представлений f_1, \dots, f_n .

Поскольку $B_1 \times \dots \times B_n$ - базис представления M Ω_1 -алгебры A , то, согласно теореме [3]-3.2.7, для любого представления

$$A \xrightarrow{*} V$$

и любого приведенного полиморфизма

$$g_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow V$$

существует единственный морфизм представлений $k : M \rightarrow V$, для которого коммутативна следующая диаграмма

$$(4.14) \quad \begin{array}{ccc} B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow g_2 & \downarrow k \\ & & V \end{array}$$

Так как g_2 - приведенный полиморфизм, то $\ker k \supseteq N$.

Согласно теореме 3.3 отображение j универсально в категории морфизмов представления f , ядро которых содержит N . Следовательно, определен морфизм представлений

$$h : M/N \rightarrow V$$

для которого коммутативна диаграмма

$$(4.15) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow j & \downarrow h \\ M & & V \\ & \searrow k & \end{array}$$

Объединяя диаграммы (4.11), (4.14), (4.15), получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & & & M/N \\ & & & \nearrow g_1 & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M & \nearrow j & \\ & \searrow g_2 & \downarrow k & & \\ & & & & V \end{array}$$

Так как $\text{Im } g_1$ порождает M/N , то отображение h однозначно определено. \square

Согласно доказательству теоремы 4.3

$$B_1 \otimes \dots \otimes B_n = M/N$$

Для $d_i \in A_i$ будем записывать

$$(4.16) \quad j \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Теорема 4.7. Пусть B_1, \dots, B_n - Ω_2 -алгебры. Пусть

$$f : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_n$$

приведенный полиморфизм, определенный равенством

$$(4.17) \quad f \circ (b_1, \dots, b_n) = b_1 \otimes \dots \otimes b_n$$

Пусть

$$g : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow V$$

приведенный полиморфизм в Ω_2 -алгебру V . Существует морфизм представлений

$$h : B_1 \otimes \dots \otimes B_n \rightarrow V$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & & B_1 \otimes \dots \otimes B_n \\
 & \nearrow f & \downarrow h \\
 B_1 \times \dots \times B_n & & V \\
 & \searrow g &
 \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Равенство (4.17) следует из равенств (4.1) и (4.16). Существование отображения h следует из определения 4.1 и построений, выполненных при доказательстве теоремы 4.3. \square

Равенства (4.12) и (4.13) можно записать в виде

$$(4.18) \quad \begin{aligned} & b_1 \otimes \dots \otimes (b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega) \otimes \dots \otimes b_n \\ & = (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i-1} \otimes \dots \otimes b_n) \dots (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i-p} \otimes \dots \otimes b_n) \omega \end{aligned}$$

$$(4.19) \quad \begin{aligned} & b_1 \otimes \dots \otimes (f_i(a)(b_i)) \otimes \dots \otimes b_n = f(a)(b_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes b_n) \\ & b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i-1}, \dots, b_{i-p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A \end{aligned}$$

5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серж Ленг, Алгебра, М. Мир, 1968
- [2] S. Burris, H.P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag (March, 1982),
eprint <http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html>
(The Millennium Edition)
- [3] Aleks Kleyn, Representation Theory: Representation of Universal Algebra, Lambert Academic Publishing, 2011
- [4] П. Кон, Универсальная алгебра, М., Мир, 1968

6. ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

полиморфизм представлений 2
приведенный полиморфизм
 представлений 3
тензорная степень представления 8
тензорное произведение представлений 8
тензорное произведение представлений 8

7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИМВОЛЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

$B^{\otimes n}$ тензорная степень представления 8

$B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ тензорное произведение
представлений 8