

# Doppleraj efikoj ĉe Schwarzschild

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II  
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

7-a de decembro, 2009

## Resumo

Movado de korpoj kaj lumo estas studitaj en gravita kampo de Schwarzschild. Pluraj Doppleraj efikoj estas priskribitaj.

## 1 Enkonduko

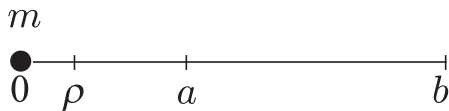
En [1]–[6] ni studis la tempon ĉe la special-relativeco. Alia artikolo [7] nia estas finiĝanta, zorgante pri difinojn de pluraj malsamaj intertempoj ĉe la ĝeneral-relativeco. Ni nun prezentas specifigon de [7] por spacotempo de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\rho}{r}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{-1} (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2\theta (d\varphi)^2, \quad \rho := \frac{2Gm}{c^2}. \quad (1)$$

Ni zorgos pri pluraj movadoj en kampo (1), en ebena  $\theta = \pi/2$  de regiono  $r > \rho$ .

Memoru ke movado de materio havas  $ds^2$  pozitivan kaj tiuokaze oni difinas infiniteziman propran intertempon  $d\tau$  kiel  $ds = c d\tau$ ; alie, movado de lumo havas  $ds = 0$ .

En sekcio 2 ni priskribas konstruadon de koordinathorloĝoj de metriko (1). En sekcio 3 ni difinas Doppleran efikon kaj prezentas la nemikse gravitan Doppleran faktoron en tiu metriko. En sekcio 4 ni skribas la diferencialajn ekvaciojn de geodezoj, kaj emfazas la gravecon de konstantoj  $E$  kaj  $h$  de integro. En sekcio 5 ni studas cirklaajn geodezojn, kaj sekcio 6 studas aliajn cirklaajn movadojn. Sekcio 7 montras, ke propratempo de cirkle moviĝanta korpo fluas malpli rapide ol tio de korpo restanta en la sama radiuso. Ĝi priskribas ankaŭ Doppleran efikon inter du korpoj cirkle moviĝantaj en la sama ebena, kaj kun la sama rotacirapido. Sekcio 8 pririgardas interesan specialan okazon de lasta sistemo, prezentante nulan Doppleran efikon. En sekcio 9 ni komparas la fluon de propratempo de radiuse geodeze moviĝanta korpo kun tio de ripozanta korpo, kaj sekcio 10 kalkulas Doppleran faktoron en tiu movado. Fine, sekcio 11 aplikas niajn rezultojn al movado de satelitoj orbitante Teron.



Figuro 1: Fonto restanta en pozicio  $r = a$  eligas lumon en kampo de Schwarzschild (1); tiu lumon estas perceptata kun Dopplera faktoro (4), per observanto restanta en pozicio  $r = b$ .

## 2 Koordinathorloĝoj

Ĉar la koeficiento  $g_{00}$  de metriko (1) pendas de  $r$ , tial du koordinathorloĝoj de (1) estas identikaj nur se ili estas en sama radiusa pozicio. Krome nur la koordinathorloĝoj de infinito (kie  $g_{00} = 1$ ) estas normhorloĝoj. Se normhorloĝo (kiu montras  $d\tau$ ) estas fiksata ĉe koordinathorloĝo (kiu montras  $dt$ ) en finhava radiusa pozicio,  $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$ ; ĉar  $g_{00} < 1$ , tial normhorloĝo marŝas malpli rapide ol loka koordinathorloĝo.

Demando: kiel estas konstruitaj la koordinathorloĝoj de metriko (1)? Respondo: (formala) ebleco estas unue fiksi unu *normhorloĝon* en ĉiu punkto  $[r, \theta, \varphi]$  de spaca teksaĵo; poste, uzante la rilaton  $d\tau = \sqrt{g_{00}(r)} dt$ , rapidigi la marŝon de ĉiu horloĝo laŭ ĝia radiusa pozicio  $r$ . Alterne, la mekanismo de ĉiu horloĝo estas neŝanĝata, sed la cifereplato estas konvene ŝanĝata por kompensi la fakton, ke  $dt > d\tau$ . Fine sinkronigi ilin laŭ Einstein [1].

## 3 Nemikse gravita Dopplera efiko

Frekvenco estas grava eco de luma ondo. Se frekvenco de lumon ricevata estas malsimila al tio de lumon eligita ni diras, ke okazas Dopplera efiko. Tiu efiko estas mezurata per la Dopplera faktoro, difinata kiel

$$D_{a \rightarrow b} := \frac{\nu_b}{\nu_a}, \quad (2)$$

estante  $\nu_a$  kaj  $\nu_b$  la *propraj frekvencoj* de lumon igita el  $a$  kaj observata en  $b$ , respektive. La efiko nomiĝas ruĝiĝo se  $D < 1$ , kaj violiĝo se  $D > 1$ .

Simpla maniero por kalkuli  $D$  estas fari, ke fonto eligu du sinsekvajn lumajn signalojn, apartitajn de infinitezima propra intertempo  $d\tau_a$ . Se tiuj signaloj estas ricevataj kun infinitezima propra intertempo  $d\tau_b$ , la Dopplera faktoro estas

$$D_{a \rightarrow b} = \frac{d\tau_a}{d\tau_b}. \quad (3)$$

Frekvencŝanĝo pendas de interrompo de fonto-observanto, kaj ankaŭ de gravito. Speciale, se ambaŭ lumfonto kaj observanto restas, kaj gravito estas neŝanĝinta ( $g_{\mu\nu}$  ne pendas de tempa koordinato), ni kalkulas la Doppleran faktoron tre facile. Fakte, tiuokaze la koordinata intertempo  $dt$  inter la eligitaj signaloj kaj la ricevataj estas samaj [8, paĝo 416]. Ĉar por la du restantaj korpoj okazas  $d\tau_a = \sqrt{g_{00}(a)} dt$  kaj  $d\tau_b = \sqrt{g_{00}(b)} dt$ , tial la (3) kaj (1) faras (vidu figuron 1)

$$D_{a \rightarrow b} = \sqrt{\frac{1 - \rho/a}{1 - \rho/b}}. \quad (4)$$

Se  $a < b$  do  $D < 1$ , indikante ruĝiĝon; kaj se  $a > b$  do  $D > 1$ , indikante violiĝon. Se  $a = b$  do  $D = 1$ , indikante neeston de Dopplera efiko. Atentu, ke la angulaj pozicioj de kaj fonto kaj observanto *restantaj* ne gravas por (4).

## 4 Geodezaj ekvacioj

Ĉar la metrikaj koeficientoj de (1) ne pendas de  $t$ , tial la tempa geodeza ekvacio generas  $g_{00}dt/d\tau = \text{konst}$ , kaj do

$$d\tau_{geod} = \frac{1}{E}(1 - \rho/r) dt, \quad E = \text{konst}. \quad (5)$$

Ĉar ili ankaŭ ne pendas de  $\varphi$ , tial la azimuta geodeza ekvacio generas  $g_{\varphi\varphi}d\varphi/d\tau = \text{konst}$ , kaj do, en ebena  $\theta = \pi/2$ ,

$$d\varphi_{geod} = \frac{c\rho h}{r^2}(1 - \rho/r) dt, \quad h = \text{konst}. \quad (6)$$

Konstantoj  $E$  kaj  $h$  estas nedimensiaj, kaj kvalite priskribas iun ajn geodezan movadon de materio (movadon de tempa tipo) en ebena  $\theta = \pi/2$ . Fakte, iuj ajn du tiel trajektorioj kun samaj valoroj de  $E$  kaj  $h$  estas surmeteblaj per spaca rotacio en la ebena.

Fine, por venonta uzo en sekcio 5 ni prezentas la dugrade diferencialan geodezan ekvacion por  $r$ :

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{\rho}{2r^2(1 - \rho/r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = r(1 - \rho/r) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 - \frac{\rho c^2(1 - \rho/r)}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2. \quad (7)$$

Por kompreni la rolon de konstanto  $E$  en (5), konsideru normhorloĝon moviĝantan *geodeze*. Ĝi pasas preter punkto en radiusa pozicio  $r$  en loka momento  $t$ , kaj pasas preter najbara punkto en loka momento  $t + dt$ . Do ĝia montrilo antaŭeniras  $d\tau_{geod}$  kiel en (5), inter la du pozicioj. Atentu, ke la rilato  $d\tau_{geod}/dt$  ne pendas de la direkto de movado de horloĝo.

Praktika esprimo de konstanto  $E$  estas havita el (1) kaj (5),

$$E = \sqrt{\frac{1 - \rho/r}{1 - v^2/c^2}}, \quad (8)$$

kie  $v$  estas funkcio pendanta de movado (geodeza aŭ ne) de korpo en ebena  $\theta = \pi/2$ ,

$$v := \sqrt{\frac{(dr/dt)^2}{(1 - \rho/r)^2} + \frac{r^2(d\varphi/dt)^2}{1 - \rho/r}}. \quad (9)$$

Ni ofte perceptos, ke tiu  $v$  tre bone ĝeneraligas la skalaran rapidon de speciala relativeco, kaj la skalaran Newtonan rapidon de korpo, en ebena  $\theta = \pi/2$ . Ekzemple, la Newtona rapido de *eskapo* ekde distanco  $r$  de centra maso  $m$  estas bonkonate  $\sqrt{2Gm/r}$ ; kaj la responda relativeca,

ekde la radiusa pozicio  $r$ , estas havebla el (8) kun  $E = 1$ , kaj estas  $v = c\sqrt{\rho/r} \equiv \sqrt{2Gm/r}$ . Do, ni nomos  $v$  kiel rapido. Vere,  $v$  rezultas el pli ĝenerala formulo, kiun ni prezentos en estonta artikolo [7].

Atentu en (8), ke se korpo kun geodeza movado atingas  $r \rightarrow \infty$  kun  $v_\infty \neq 0$ , do  $E = 1/\sqrt{1 - v_\infty^2/c^2}$ , kaj do  $E > 1$ ; ankaŭ atentu, ke restado en senlima radiusa pozicio ( $v_\infty = 0$ ) estas geodezo kun  $E = 1$ . Kaj se geodeze moviĝanta korpo momente restas en iu limhava radiusa pozicio  $r = b$ , do  $E = \sqrt{1 - \rho/b}$ , kaj do  $E < 1$ ; tiu pozicio estas tio de maksimuma distanco de korpo al centra maso.

Interesas rimarki, ke esprimo  $E - 1$  similas al Newtona totala energio. Fakte, en Newtona gravito ni difinas la totalan energion  $E_t$  de korpo kiel la algebra adicio de ĝia kinetika energio (pozitiva) kun ĝia potenciala energio (malpozitiva). Se  $E_t \geq 0$  ( $E \geq 1$  relativece), la korpo povas foriĝi ĝis  $\infty$ , tamen se  $E_t < 0$  ( $0 < E < 1$  relativece), la korpo trakuras nur regionoj kun  $r < \infty$ .

## 5 Cirklaĵoj geodezoj

Por studi cirklaĵajn geodezojn de Schwarzschilda metriko (1) en ebena  $\theta = \pi/2$ , ni konsideras  $r = \text{konst}$  en (7) kaj ricevas la tempe konstantan rotacirapidon  $\omega := d\varphi/dt$ ,

$$\omega_{geod}^{cirk}(r) = \pm c\sqrt{\frac{\rho}{2r^3}}, \quad r = \text{konst}; \quad (10)$$

ĉar  $\rho = 2Gm/c^2$  tial ni konstatas, ke  $\omega_{geod}^{cirk}(r)$  formale koincidas kun la Newtona geodeza rezulto  $\pm\sqrt{Gm/r^3}$ . Vidu kurbon  $G$  en figuro 2.

Uzante (6) kaj (10) ni vidas, ke la konstanto  $h$  de cirkla geodeza movado valoras

$$h_{geod}^{cirk}(r) = \pm \frac{\sqrt{r/(2\rho)}}{1 - \rho/r}, \quad r = \text{konst}, \quad (11)$$

kaj uzante (1) kaj (5) kaj (11), ni ricevas

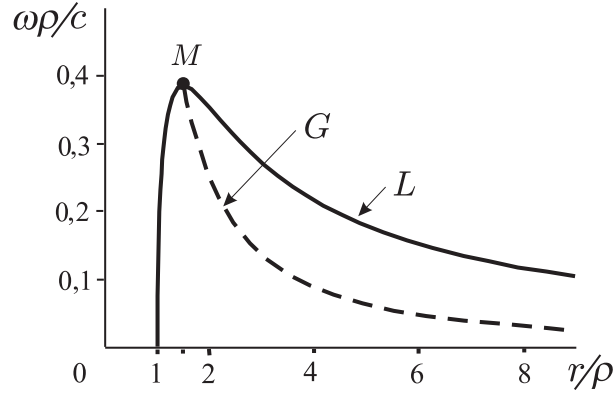
$$E_{geod}^{cirk}(r) = \frac{1 - \rho/r}{\sqrt{1 - 3\rho/(2r)}}, \quad r = \text{konst}. \quad (12)$$

Atentu en (12), ke cirkla geodezo de korpo havas  $E_{geod}^{cirk} < 1$ , kaj ekzistas nur se  $r > 3\rho/2$ .

Fine, uzante (9) kun  $dr/dt = 0$ , kaj (10), ni ricevas la tangentan rapidon de geodeza cirkla movado kun radiuso  $r$ :

$$v_{geod}^{cirk}(r) = c\sqrt{\frac{\rho}{2(r - \rho)}}, \quad r = \text{konst}. \quad (13)$$

Ni vidas, ke  $v_{geod}^{cirk}(r) \rightarrow c$  se  $r \rightarrow 3\rho/2$ . Tio signifas, ke nur lumo moviĝas geodeze en cirklo kun tiu radiuso.



Figuro 2: Strekata kurbo  $G$  montras la rotacirapidon  $\omega$  de korpo kun cirkla geodeza movado kun radiuso  $r$ , kiel (10). Plena kurbo  $L$  montras la plej grandan rotacirapidon  $\omega$  de korpo en cirkla movado kun radiuso  $r$ , kiel (14). Maksimumo punkto  $M = [3/2, 2/\sqrt{27}]$  de kurbo  $L$  indikas bonkonatan geodezan cirklan movadon de lumo.

## 6 Cirklaj movadoj

Ni studos movadojn, geodezajn aŭ ne, kun  $\theta = \pi/2$  kaj  $r = \text{konst}$ , en Schwarzschilda metriko (1). Malsimile al la Newtona kinematiko, la relativeca teorio limigas la rotacirapidon de tiuj movadoj. Fakte, en cirkla movado kun radiuso  $r$ , la kondiĉo  $ds^2 > 0$  por movado de korpo faras, ke la rotacirapido  $\omega := d\varphi/dt$  havu modulon plieta ol

$$\omega_{limo}(r) := \frac{c}{r} \sqrt{1 - \rho/r}. \quad (14)$$

Tio estus la  $\omega$  de lumoj vojaĝanta kun rapido  $c$  en cirklo kun radiuso  $r$ . Kurbo  $L$  en figuro 2 montras la interesan funkcion (14). Atentu, ke paroj  $[r, \omega]$  donante cirklan movadon de korpo ekzistas nur sub kurbo  $L$ . Tiu kurbo ankaŭ montras, ke duoj de valoroj de radiuso  $r$  de la cirklo havas saman  $\omega_{limo}$ . Por la sola radiuso  $r = 3\rho/2$ ,  $\omega_{limo}(r)$  atingas maksimuman valoron

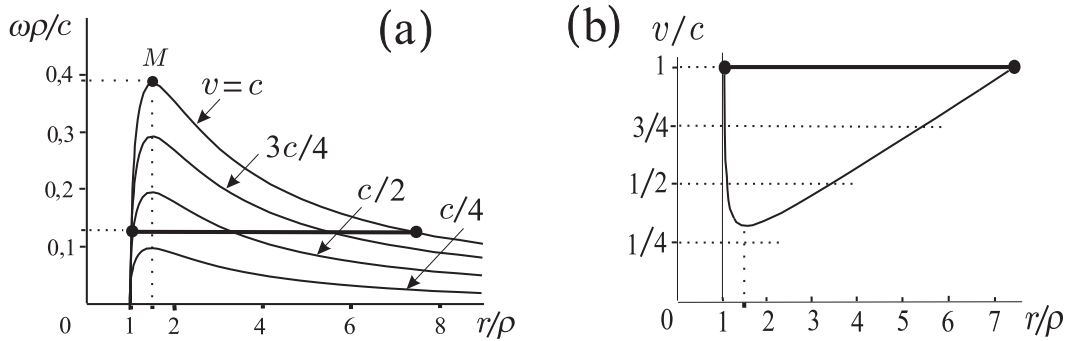
$$\omega_{maks} := \frac{2}{\sqrt{27}} \frac{c}{\rho}. \quad (15)$$

Vidu punkton  $M = [3/2, 2/\sqrt{27}]$  en figuro 2. Ĉar (10) kun  $r = 3\rho/2$  faras  $|\omega_{geod}^{cirk}| = (2/\sqrt{27})(c/\rho)$  same kiel (15), tial punkto  $M$  indikas *luman geodezon*. Indas komenti, ke en ordinara fizikaj sistemoj tiu relativeca limigo  $|\omega| \leq \omega_{maks}$  ordinare ne gravas, ĉar la materio generanta graviton ordinare okupas tiun radiusan pozicion  $3\rho/2$ .

Newtono, stango povas rotacii kun iu ajn rotacirapido  $\omega$  ĉirkaŭ unu el ĝiaj ekstremoj, kaj povas esti iom ajn longa. Tamen special relativeco limigas la longon al maksimuma valoro  $c/\omega$  tial, ke la ekstera ekstremo ne havu rapidon pli granda ol  $c$ . Plua limigo estas ĉe Schwarzschild tial, ke la ena ekstremo ne havu rapidon  $c$ .

Fakte, la tangenta rapido de punkto  $r$  de stango kun rotacirapido  $\omega$  estas

$$v_{cirk}(r) = \frac{r\omega}{\sqrt{1 - \rho/r}}, \quad (16)$$



Figuro 3: (a) Ĉiu kurbo montras parojn  $[r, \omega]$  por cirkla movado kun la indikata tangenta rapido. La horizonta streko indikas stangon rotaciantan kun rotacirapido  $\omega = 0,125 c/\rho$  ĉirkaŭe la centra maso, kaj kuŝante inter radiusaj pozicioj  $r_{min} = 1,016\rho$  kaj  $r_{max} = 7,25\rho$ . (b) Rapido (16) de punktoj de stango en antaŭa figuro. Ambaŭ ekstremoj havas rapidon  $v \rightarrow c$ , kaj la pli eta rapido okazas en  $r = 3\rho/2$ .

do la limigo  $v < c$  (ekvivalente  $ds^2 > 0$  en (1)) generas limigojn  $r_{min}(\omega) < r < r_{max}(\omega)$ . Figuro 3.a montras kurbojn kies paroj  $[r, \omega]$  havas la indikatan tangentan rapidon  $v$ . Ĝi ankaŭ montras stangon radiuse kuŝantan inter radiusaj pozicioj  $r_{min}$  kaj  $r_{max}$ , kiun rotacias kun  $\omega = 0,125 c/\rho$ . Figuro 3.b montras rapidon (16) de punktoj de stango.

## 7 Komparo de propratempoj – cirkle

Ni komparas la tempan fluan de du normhorloĝoj malsimile moviĝantaj. La unua moviĝas cirkle kun radiuso  $r$  kaj rotacirapido  $d\varphi/dt = \omega = \text{konst}$ , supozata pozitiva. Laŭ (1), la propra intertempo post unu kompleta turno estas

$$\Delta\tau_{mov} = (2\pi/\omega)\sqrt{1 - \rho/r - \omega^2 r^2/c^2}. \quad (17)$$

La alia normhorloĝo, restanta en tiu radiusa pozicio  $r$  dum la sama koordinata intertempo  $\Delta t = 2\pi/\omega$ , montras propran intertempon

$$\Delta\tau_{rip} = (2\pi/\omega)\sqrt{1 - \rho/r}. \quad (18)$$

Esprimoj (17) kaj (18) simpliĝas se ni uzas  $v = \omega r/\sqrt{1 - \rho/r}$ , la rapidon (16) de cirkle moviĝanta horloĝo. Tiukaze,

$$\Delta\tau_{mov} = \frac{2\pi r}{v\gamma}, \quad \Delta\tau_{rip} = \frac{2\pi r}{v}, \quad (19)$$

estante  $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Ĉar  $\gamma > 1$ , tial  $\Delta\tau_{mov} < \Delta\tau_{rip}$ , tio estas, la tempo de la moviĝanta normhorloĝo fluis pli malrapide ol la tempo de la restanta normhorloĝo.

Tiu rezulto koincidas kun tio de special-relativeco, ke  $\Delta\tau$  de moviĝanta horloĝo estas plieta ol tio de restanta horloĝo, poste unu kompleta turno. Certe, la fakto ke la du horloĝoj estas en

gravita potencialo kun sama valoro estas baza por tiu koincido. Krome, ne gravas se la movado estas geodeza, aŭ ne.

El ekvacio (17) oni povas kalkuli Doppleran faktoron inter du korpoj, cirkle moviĝantaj en la sama ebena, kun sama konstanta rotacirapido kaj malsamaj radiusoj. Fakte, dividante (17) per ĝi mem kun malsamaj radiusoj, oni ricevas

$$D_{a \rightarrow b} = \sqrt{\frac{1 - \rho/r_a - \omega^2 r_a^2/c^2}{1 - \rho/r_b - \omega^2 r_b^2/c^2}}. \quad (20)$$

## 8 Kunaj cirklaĵoj movadoj

Konsideru du normhorloĝojn cirkle moviĝantajn kun sama rotacirapido  $\omega := d\varphi/dt = \text{konst}$  en ebena  $\theta = \pi/2$  de metriko (1), sed en malsamaj radiusoj  $r_1$  kaj  $r_2$ . Laŭ la Newtona kinematiko, la horloĝo en cirklo kun plieta radiuso havas plietan tangentan rapidon. Laŭ la special-relativeco, tiu fakto farus ke ĝia propratempo fluu *pli* rapide ol tiu de la alia. Sed ĝi trakuras regionojn kun plieta  $g_{00}$ ; laŭ la ĝeneral-relativeco, tiu alia fakto farus ke ĝia propratempo fluu *malpli* rapide ol tiu de la alia. Ni demandas: ĉu la du efikoj povas ekzakte ekvilibri?

La respondo estas *jes*. Por ĉiu valoro de  $\omega$ , ni trovos ne-nombreblan kvanton da paroj de radiusoj  $(r_1, r_2)$  tiel ke la propraj intertempoj  $\Delta\tau_1$  kaj  $\Delta\tau_2$  de la horloĝoj estas samaj, post unu kompleta turno. La graveco de tiu rezulto estas, ke lumaj signaloj igitaj el unu horloĝo al la alia ne havas Doppleran efikon.

Fakte, ekvacio (1) kun  $dr = 0$  faras  $(d\tau_1)^2 = (1 - \rho/r_1)(dt)^2 - (r_1^2/c^2)(d\varphi)^2$  kaj  $(d\tau_2)^2 = (1 - \rho/r_2)(dt)^2 - (r_2^2/c^2)(d\varphi)^2$ . Uzante  $d\tau_1 = d\tau_2$  kaj  $\omega := d\varphi/dt$  okazas

$$r_1 r_2 (r_1 + r_2) = \frac{\rho c^2}{\omega^2}. \quad (21)$$

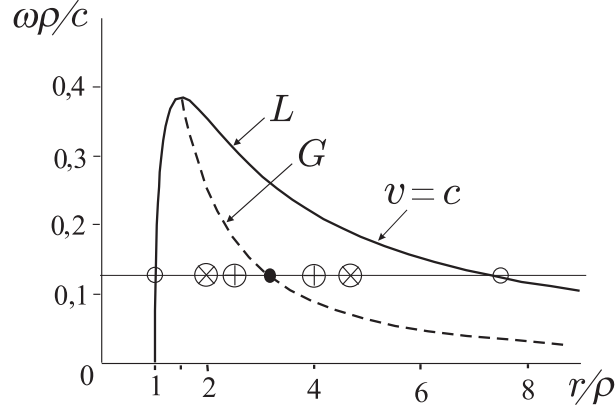
Atentu, ke oni ankaŭ povus ricevi (21) farante  $D_{a \rightarrow b} = 1$  en (20). Ekvacio (21) estas simetria per ŝanĝo  $r_1 \leftrightarrow r_2$ . Solvata, ĝi prezentas radiuson  $r_2$  kiel funkcio de radiuso  $r_1$  laŭ

$$r_2 = \frac{r_1}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4c^2 \rho}{\omega^2 r_1^3}} - 1 \right). \quad (22)$$

Uzante (10) en (21) ni konstatas, ke se movado kun radiuso  $r_1$  estas geodeza, do  $r_2 = r_1$ . Ni ankaŭ atentis en (21), ke se  $r_1$  pliiĝas, do  $r_2$  plietigigas, kaj reciproke. Oni konkludas ke, se  $r_1$  estas plieta ol la geodeza radiuso, do  $r_2$  estas pligranda ol la geodeza radiuso. Figura 4 remontras kurbojn  $L$  kaj  $G$  el figura 2 kaj iom da paroj de radiusoj por speciala rotacirapido  $\omega = 0,125 c/\rho$ . Oni povas montri, ke rapido (16) de korpo en ekstera cirklo estas ĉiam pligranda ol de korpo en ena cirklo, same kiel la parolado de la unua paragrafo de ĉi tiu sekcio.

## 9 Komparo de propratempoj – radiuse

Normhorloĝo komence ripozanta en  $r = a > \rho$  estas subite ĵetata radiuse, eksteren, en geodeza movado. Ĝi moviĝas ĝis la maksimuma radiusa pozicio  $r = b > a$ , kaj revenas al pozicio  $r = a$ . Alia normhorloĝo restas en radiuso  $r = a$  dum la tuta tempo.



Figuro 4: Kurboj  $L$  kaj  $G$  el figuro 2 kaj kvar paroj ( $\circ$ ,  $\otimes$ ,  $\oplus$ ,  $\bullet$ ) de korpoj en radiusoj ( $r_1, r_2$ ) el ekvacio (22), kun rotacirapido  $\omega = 0,125 c/\rho$ ; por ĉiu paro, la propratempoj de korpoj fluas same. Speciale, atentu liman paron ( $\circ$ ) kun rapido  $c$ , kaj atentu paron  $r_1 = r_2$  ( $\bullet$ ) kun geodeza movado.

Ni demandas: en renkonto, kiu horloĝo prezentas pligrandan varion  $\Delta\tau$  de propratempo? La fakto, ke la geodeza horloĝo moviĝas, dume la ne geodeza ĉiam restas, favoras ke  $\Delta\tau_{geod}$  estu *plieta*. Sed la fakto, ke la geodeza horloĝo trakuras regionojn kun pligranda  $g_{00}$  favoras ke  $\Delta\tau_{geod}$  estu *pligranda*. Do la demando ne posedas tujan evidentan respondon.

Ĉar la geodeze moviĝanta horloĝo momente restas en  $r = b$ , tial  $v_b = 0$ , kaj do (8) faras  $E = \sqrt{1 - \rho/b}$  por ĝia movado. Tio en (5) okazigas  $(1 - \rho/b)(d\tau)^2 = (1 - \rho/r)^2(dt)^2$ , ke uzata en metriko (1) faras (memoru, ke  $ds^2 = c^2(d\tau)^2$ )

$$\frac{(dr)^2}{\rho/r - \rho/b} = (c d\tau_{geod})^2; \quad (23)$$

integrate duapotencan radikon de (23) de  $r = a$  ĝis  $r = b$  aperigas  $\Delta\tau_{geod}(\rho, a, b)$ :

$$c\Delta\tau_{geod} = \sqrt{b/\rho} \left( \sqrt{a(b-a)} + b \cos^{-1} \sqrt{a/b} \right). \quad (24)$$

Dum tiu intertempo, la montrado de la normhorloĝo restanta en  $r = a$  antaŭeniras, laŭ sekcio 2,

$$\Delta\tau_{rip} = \sqrt{1 - \rho/a} \Delta t, \quad (25)$$

estante  $\Delta t$  la koordinata intertempo dum la forirado de la vojaĝanta horloĝo. Simile al (23), praviĝas

$$\frac{(dr)^2}{(1 - \rho/r)^2(\rho/r - \rho/b)} = \frac{(cdt)^2}{1 - \rho/b}, \quad (26)$$

kio interrilatas tempan kaj radiusan koordinatojn de moviĝanta horloĝo. Integrate la duapotencan radikon de (26) de  $r = a$  ĝis  $r = b$  oni malkovras la intertempon  $\Delta t$ . Uzante tiun  $\Delta t$  en (25) rezultigas la propran intertempon de la ripozanta horloĝo



$$c\Delta\tau_{rip} = \sqrt{1-\rho/a} \left( \sqrt{b/\rho-1} \left( \sqrt{a(b-a)} + (b+2\rho) \cos^{-1} \sqrt{a/b} \right) + 2\rho \tanh^{-1} \sqrt{\frac{b/a-1}{b/\rho-1}} \right). \quad (27)$$

Atentu, ke se  $b = a > \rho$  do ne estas movado, kaj do  $\Delta\tau_{rip} = 0$ . Atentu ankaŭ, ke se la ejo de ĵeto estas tre proksima al la radiuso de Schwarzschild, t.e., se  $a \rightarrow \rho$ , do  $\Delta\tau_{rip} \rightarrow 0$  kvankam  $\Delta t \rightarrow \infty$ .

Intertempoj (27) kaj (24) estas nelonge prezentitaj per Grøn kaj Braeck [9]. Nek ili nek ni sukcesis montri *algebre*, ke  $\Delta\tau_{geod} > \Delta\tau_{rip}$  por iuj ajn valoroj de  $\rho < a < b$ . Tamen, numeraj kalkuloj kaj tridimensiaj grafikaĵoj indikas tiun rezulton. Tio montras, ke la efikoj akumulitaj per gravito en ĉi tiu movado estas pli fortaj ol la efikoj akumulitaj per rapido, kontraŭe al okazo de sekcio 7.

## 10 Dopplera faktoro en radiusaj movadoj

Luma fonto moviĝas radiuse en spacotempo (1), kaj eligas lumon el radiusa pozicio  $a > \rho$ . Tiu lumo estas perceptata per observanto restanta en radiusa pozicio  $b > \rho$ . Ambaŭ okazoj  $a > b$  kaj  $a < b$  estas pripensindaj. La angulaj valoroj  $\theta$  kaj  $\varphi$  de pozicioj de eligo kaj percepto estas samaj. Ni scivolas la Doppleran faktoron de percepto.

Same kiel en sekcio 3 ni faras, ke fonto eligu du sinsekvajn lumajn signalojn, en koordinatmomentoj  $t_1$  kaj  $t_1 + d_a t$ , estante fonto en radiusaj pozicioj  $a$  kaj  $a + d_a r$ , respektive; kaj  $d_a t > 0$ . Ĉar la fonto moviĝas aŭ eksteren aŭ enen, tial ambaŭ okazoj  $d_a r > 0$  kaj  $d_a r < 0$  estas konsiderindaj. Observanto *restas* en radiusa pozicio  $b$ , kaj ricevas la signalojn en koordinatmomentoj  $t_2$  kaj  $t_2 + d_b t$ , respektive. Por uzo en esprimo (3) de Dopplera faktoro, ni kalkulas la proprajn intertempojn  $d\tau_a$  kaj  $d\tau_b$ , respondajn al  $dt_a$  kaj  $dt_b$ , respektive.

Uzante (1) kaj (9) kun  $d\varphi = 0$  kaj  $d\theta = 0$  oni ricevas, por moviĝanta fonto,

$$d\tau_a = \sqrt{1 - v_a^2/c^2} \sqrt{1 - \rho/a} d_a t. \quad (28)$$

Simile, por la restanta observanto en radiusa pozicio  $b$ , la intertempo  $d\tau_b$  estas

$$d\tau_b = \sqrt{1 - \rho/b} d_b t. \quad (29)$$

Ni bezonas rilatigi  $d_b t$  al  $d_a t$ . La ekvacio de movado de *luma signalo* en radiusa movado estas havebla farante  $ds^2 = 0$  en linia elemento (1) kaj konsiderante  $d\theta = 0$  kaj  $d\varphi = 0$ . Rezultas

$$c dt = \epsilon_\gamma \frac{dr}{1 - \rho/r}, \quad (30)$$

estante  $\epsilon_\gamma = +1$  se signalo moviĝas en *pozitiva* direkto de  $r$ , kaj  $\epsilon_\gamma = -1$  kontraŭe. Ni integras (30) por la unua signalo,

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \epsilon_\gamma \int_a^b \frac{dr}{1 - \rho/r}, \quad (31)$$

kaj ankaŭ por la dua signalo,

$$c \int_{t_1+d_a t}^{t_2+d_b t} dt = \epsilon_\gamma \int_{a+d_a r}^b \frac{dr}{1-\rho/r}. \quad (32)$$

Subtrahante (31) de (32) fariĝas

$$c(d_b t - d_a t) = \epsilon_\gamma \left( \int_{a+d_a r}^b - \int_a^b \right) \frac{dr}{1-\rho/r} \equiv -\epsilon_\gamma \int_a^{a+d_a r} \frac{dr}{1-\rho/r}, \quad (33)$$

tio estas,

$$d_b t = d_a t - \frac{\epsilon_\gamma}{c} \frac{d_a r}{1-\rho/a}. \quad (34)$$

Ni povas skribi  $d_a r$  kiel funkcio de  $d_a t$  uzante  $v$  difinata en (9) kun  $d\varphi/dt = 0$ :

$$v_a = \epsilon_a \frac{1}{1-\rho/a} \frac{d_a r}{d_a t}, \quad (35)$$

estante  $\epsilon_a = +1$  se la fonto moviĝas en la pozitiva direkto de  $r$  en momento de eligo, kaj  $\epsilon_a = -1$  kontraŭe, por ke  $v_a \geq 0$ . Portante  $d_a r$  de (35) al (34), ĉi tiu ekvacio fariĝas

$$\frac{d_a t}{d_b t} = \frac{1}{(1+\epsilon v_a/c)}, \quad \epsilon := -\epsilon_a \epsilon_\gamma. \quad (36)$$

Kuna analizo de  $\epsilon_a$  kaj  $\epsilon_\gamma$  montras, ke  $\epsilon = +1$  se la fonto foriĝas de radiusa pozicio  $r = b$  en momento de eligo de signaloj, kaj  $\epsilon = -1$  kontraŭe. Kunigante (28), (29), kaj (36), ni fine ricevas

$$D = \sqrt{\frac{1-\rho/a}{1-\rho/b} \frac{1-\epsilon v_a/c}{\sqrt{1-v_a^2/c^2}}}. \quad (37)$$

Ni vidas en (37), ke se gravito ne estas, t.e., se  $\rho = 0$ , okazas

$$D_{sr} = \sqrt{\frac{1-\epsilon V/c}{1+\epsilon V/c}}, \quad V := |d_a r/dt|; \quad (38)$$

ĉi tiu estas la rezulto proponita por special-relativeco.

Ekvacio (37) antaŭdiras, ke kuna ago de  $v_a \neq 0$  kaj gravito povas malaperigi Doppleran efikon; fakte, se  $a > b$  do povas okazi  $D = 1$  se  $\epsilon = +1$ , tio estas, se la fonto foriras de pozicio  $r = b$  en momento de eligo. Kontraŭe, se  $a < b$  do povas okazi  $D = 1$  se  $\epsilon = -1$ , tio estas, se la fonto proksimiĝas al pozicio  $r = b$  en momento de eligo.

Ni nun kalkulas la Doppleran faktoron se la fonto estas tuje antaŭ  $b$ , aŭ tuje post. Por tio ni faras  $a = b$  en (37) kaj ricevas

$$D = \sqrt{\frac{1 - \epsilon v_a/c}{1 + \epsilon v_a/c}}. \quad (39)$$

Ruĝiĝo ( $D < 1$ ) okazas se la fonto foriras de ricevanto ( $\epsilon = +1$ ) kaj violiĝo ( $D > 1$ ) okazas se ĝi alproksimiĝas ( $\epsilon = -1$ ). Ekvacio (39) similas al (38) de special-relativeco se  $v_a$  estas la rapido  $V$  de fonto laŭ la special-relativeco.

Se la fonto moviĝas geodeze kaj radiuse, kaj se  $a > b$ , do (37) estas skribebla multe pli kompakte. Tiuokaze, nomu  $v_b$  la rapido de fonto kiam ĝi pasas preter  $b$ , kaj nomu  $v_a$  la rapido kiam ĝi pasas preter  $a$ . Ĉar la konstanteco de  $E$  en (8) implicas

$$\frac{\sqrt{1 - \rho/a}}{\sqrt{1 - v_a^2/c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \rho/b}}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}}, \quad (40)$$

tial (37) simpliĝas al

$$D = \gamma_b(1 - \epsilon v_a/c), \quad \gamma_b := 1/\sqrt{1 - v_b^2/c^2}. \quad (41)$$

Ekvacio (41) validas ankaŭ se  $a < b$ , kondiĉe ke  $\sqrt{(1 - \rho/a)/(1 - \rho/b)} \geq \sqrt{1 - v_a^2/c^2}$ ; ĉi tiu estas necesa kondiĉo por ke fonto pasu tra la radiusa pozicio  $r = b$ .

Ni ĝeneraligas (37) por okazo de ankaŭ observanto radiuse moviĝanta. Kalkulante kiel antaŭe ni ricevas

$$D = \sqrt{\frac{1 - \rho/a}{1 - \rho/b}} \sqrt{\frac{1 - \epsilon v_a/c}{1 + \epsilon v_a/c}} \sqrt{\frac{1 - \epsilon' v_b/c}{1 + \epsilon' v_b/c}}, \quad (42)$$

estante  $\epsilon' = +1$  se observanto foriras de radiusa pozicio  $r = a$  en momento de recepto de signaloj, aŭ  $\epsilon' = -1$  kontraŭe, kaj estante  $v_b$  la rapido (9) de observanto en momento de recepto.

## 11 Apliko al Tero

Ni aplikas nun iom da niaj teoriaj rezultoj al movado de satelitoj orbitante Teron. Unue, ni kalkulas radiuson de orbito de geodeze Tero-staranta satelito. Ĉar Tera rotacirapido estas  $\omega_T = (2\pi/86.400) \text{ rad/s}$ , kaj Schwarzschilda radiuso de Tero estas  $\rho_T = 2Gm_T/c^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ m}$ , tial el (10) oni ricevas  $r_{\text{geod}} = 42 \times 10^6 \text{ m}$ . Uzante tiun rezulton kaj (20) oni povas kalkuli la Doppleran efikon observatan en Tero ( $r_T = 6 \times 10^6 \text{ m}$ ) el geodeze Tero-staranta satelito:  $D_{s \rightarrow T} \approx 1 + 6 \times 10^{-10}$  (vialiĝon).

Nun ni kalkulas radiuson de orbito de ne-geodeza satelito kun la sama rotacirapido de Tero kaj sen Dopplera efiko kiam vidata de Tero. Uzante la superajn valorojn en (22) oni ricevas

$r_2 = 151 \times 10^6 m$ . Atentu, ke esperinde tio estas pli granda ol radiuso de geodeze Tero-staranta orbito; ankaŭ rimarku, ke tio estas pli eta ol la distanco Tero-Luno.

Du freŝdataj artikoloj enhavas kelkajn el niaj rezultoj. Fakte, iom da cirklaĵaj movadoj en nia sekcio 7 estas ankaŭ priskribitaj en [10], kaj la radiusaj movadoj en nia sekcio 9 estas studitaj en [9]. Same kiel ni, tiuj artikoloj komparas  $\Delta\tau$ , sed ĉi tie ni plu analizas Dopplerajn efikojn.

En estonta artikolo [7] ni studos plurajn difinojn de intertempo en arbitraj spacotempoj en ĝeneral-relativeco, kaj generaligas iom da rezultoj de ĉi tiu artikolo. Estas interesa ankaŭ detale studi malkune la kontribuojn de special-relativeco kaj de ĝeneral-relativeco al rezultoj de ĉi tiu artikolo.

## Citaĵoj

- [1] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, arXiv/physics/0603053; CBPF-NF-006/06.
- [2] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, arXiv/physics/0701092; CBPF-NF-002/07.
- [3] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, arXiv:0704.1130; CBPF-NF-011/07.
- [4] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I*, arXiv:0801.2290; CBPF-NF-001/08.
- [5] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – III*, arXiv:0808.0126; CBPF-NF-018/08.
- [6] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *Dopplera efiko de luma ebena vidata per akcelata observanto*, arXiv:0810.2776; CBPF-NF-022/08.
- [7] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *La relativeca tempo – II*, baldaŭ aperonta en arXiv(physics).
- [8] J.L. Anderson, *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967).
- [9] Ø. Grøn, S. Braeck, *A cosmic solution to the twin paradox*, arXiv:0909.5364.
- [10] M.A. Abramowicz, S. Bajtlik, *Adding to the paradox: the accelerated twin is older*, arXiv:0905.2428.