

Una Ecuación Lineal de Movimiento

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires

Argentina

Este trabajo presenta una ecuación lineal de movimiento que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas $\{a, b, c \text{ y } d\}$ puede formar el sistema de bipartículas $\{ab, ac, ad, bc, bd \text{ y } cd\}$ o también el sistema de bipartículas $\{ad, bd \text{ y } cd\}$

La masa m_{ij} de una bipartícula ij , está dada por: $m_{ij} \doteq m_i m_j / M$, donde m_i es la masa de la partícula i , m_j es la masa de la partícula j y M ($\doteq \sum_k m_k$) es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición lineal \vec{r}_{ij} , la velocidad lineal \vec{v}_{ij} y la aceleración lineal \vec{a}_{ij} de una bipartícula ij , están dadas por:

$$\vec{r}_{ij} \doteq (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$\vec{v}_{ij} \doteq (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$\vec{a}_{ij} \doteq (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) - 2 \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] - \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del free-system (ver Anexo I) \mathbf{r}_i es el vector de posición de la partícula i y \mathbf{r}_j es el vector de posición de la partícula j ($\vec{v}_{ij} \doteq d(\vec{r}_{ij})/dt$) y ($\vec{a}_{ij} \doteq d^2(\vec{r}_{ij})/dt^2$)

El momento lineal \vec{P}_{ij} de una bipartícula ij (m_{ij}) está dado por: $\vec{P}_{ij} \doteq m_{ij} \vec{v}_{ij}$, donde \vec{v}_{ij} es la velocidad lineal de la bipartícula ij .

La fuerza lineal \vec{F}_{ij} que actúa sobre una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$\vec{F}_{ij} \doteq m_{ij} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j)$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza neta que actúa sobre la partícula i , \mathbf{F}_j es la fuerza neta que actúa sobre la partícula j , m_i es la masa de la partícula i y m_j es la masa de la partícula j .

Dinámica Lineal

La ecuación lineal de movimiento para una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$\vec{F}_{ij} = d(\vec{P}_{ij})/dt = m_{ij} \vec{a}_{ij}$$

donde \vec{F}_{ij} es la fuerza lineal que actúa sobre la bipartícula ij , \vec{P}_{ij} es el momento lineal de la bipartícula ij y \vec{a}_{ij} es la aceleración lineal de la bipartícula ij .

W, K, U, E y L

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) que actúan sobre una bipartícula ij , está dado por:

$$W_{ij} \doteq \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_{ij}) = \Delta^{1/2} m_{ij} (\vec{v}_{ij})^2 \doteq \Delta K_{ij}$$

donde \vec{F}_{ij} es la fuerza lineal que actúa sobre la bipartícula ij , \vec{r}_{ij} es la posición lineal de la bipartícula ij , m_{ij} es la masa de la bipartícula ij , \vec{v}_{ij} es la velocidad lineal de la bipartícula ij y K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij .

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) conservativas que actúan sobre una bipartícula ij es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U_{ij} de la bipartícula ij .

$$\Delta U_{ij} \doteq - \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_{ij})$$

Por lo tanto, la energía mecánica E_{ij} de una bipartícula ij permanece constante si la bipartícula ij está sujeta sólo a fuerzas (vectoriales) conservativas.

$$\Delta E_{ij} \doteq \Delta K_{ij} + \Delta U_{ij} = 0$$

$$E_{ij} \doteq K_{ij} + U_{ij} = \text{constante}$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij .

Finalmente, el Lagrangiano L_{ij} de una bipartícula ij , está dado por:

$$L_{ij} \doteq K_{ij} - U_{ij}$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij .

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre \mathbf{F}_i ni sobre \mathbf{F}_j .

Todas las magnitudes de este trabajo (\vec{r}_{ij} , \vec{v}_{ij} , \vec{a}_{ij} , \vec{P}_{ij} , \vec{F}_{ij} , W_{ij} , K_{ij} , U_{ij} , E_{ij} y L_{ij}) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las magnitudes (W_{ij} , K_{ij} , U_{ij} , E_{ij} y L_{ij}) son en realidad magnitudes escalares nuevas que por comodidad en este trabajo se les quitó el adjetivo «lineal»

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración \mathbf{A} del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

Por otro lado, este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, si un sistema de referencia inercial está fijo sobre la partícula j ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_j = \mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j = 0$) de una bipartícula ij (m_{ij}) entonces de la ecuación lineal de movimiento, se obtiene:

$$m_{ij} (\mathbf{F}_i/m_i) = m_{ij} (\mathbf{a}_i)$$

$$m_{ij} (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i) = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i = 0$$

puesto que en todo sistema de referencia inercial siempre $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$ (así como en todo sistema de referencia no inercial introduciendo las fuerzas ficticias sobre \mathbf{F}_i)

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica lineal alternativa basada en el Lagrangiano L_{ij} o en el Lagrangiano L_i (ver Anexo III) que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Anexo I

Transformaciones

$$\vec{r}'_{ij} = \vec{r}_{ij}$$

$$\vec{v}'_{ij} = \vec{v}_{ij}$$

$$\vec{a}'_{ij} = \vec{a}_{ij}$$

$$\mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{v}'_{ij} - \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{v}_{ij} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{a}'_{ij} - 2 \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'_{ij} + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'_{ij}) - \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{r}'_{ij} = \mathbf{a}_{ij} - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{ij} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij}) - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{ij}$$

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición \mathbf{R} , la velocidad \mathbf{V} y la aceleración \mathbf{A} del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathbf{M} \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\mathbf{R} \doteq \mathbf{M}^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{V} \doteq \mathbf{M}^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{M}^{-1} \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i$$

$$\boldsymbol{\omega} \doteq \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq d(\boldsymbol{\omega})/dt$$

$$\mathbf{I} \doteq \sum_i^N m_i [|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})]$$

$$\mathbf{L} \doteq \sum_i^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$$

donde M es la masa del free-system, \mathbf{I} es el tensor de inercia del free-system (respecto a \mathbf{R}) y \mathbf{L} es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Anexo II

Sistema de N Partículas

$$\begin{aligned} I_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}|^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \{ (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \{ (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N 1/2 m_i m_j M^{-1} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N 1/2 m_i [(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{ij} &\doteq \sum_{j>i}^N m_i m_j M^{-1} \int_1^2 [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \int_1^2 [(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] \\ &= \sum_{i=1}^N \int_1^2 [\mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})] = \Delta K_{ij} \end{aligned}$$

Relaciones

$$K_{ij} = 1/2 G_{ij} I_{ij}^{-1} G_{ij} + 1/2 \mathbf{L}_{ij} \cdot \mathbf{I}_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{L}_{ij}$$

$$K_{ij}^L \doteq K_{ij} = \text{Energía cinética lineal del sistema de N partículas.}$$

$$K_{ij}^R \doteq 1/2 G_{ij} I_{ij}^{-1} G_{ij} = \text{Energía cinética radial del sistema de N partículas.}$$

$$K_{ij}^A \doteq 1/2 \mathbf{L}_{ij} \cdot \mathbf{I}_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{L}_{ij} = \text{Energía cinética angular del sistema de N partículas.}$$

Anexo III

Partícula i & Free-System

$$\vec{r}_i \doteq (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})$$

$$\vec{v}_i \doteq (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})$$

$$\vec{a}_i \doteq (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}) - 2 \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})] - \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})$$

$$\vec{P}_i \doteq m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{F}_i \doteq \mathbf{F}_i$$

$$\vec{F}_i = d(\vec{P}_i)/dt = m_i \vec{a}_i$$

$$\text{Si } \mathbf{F}_i = 0 \rightarrow \vec{P}_i = \text{constante}$$

$$W_i \doteq \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d(\vec{r}_i) = \Delta^{1/2} m_i (\vec{v}_i)^2$$

$$\Delta K_i \doteq \Delta^{1/2} m_i (\vec{v}_i)^2$$

$$\Delta U_i \doteq - \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d(\vec{r}_i)$$

$$E_i \doteq K_i + U_i$$

$$L_i \doteq K_i - U_i$$

$$\text{Si } \mathbf{F}_i = \text{fuerzas conservativas} \rightarrow E_i \doteq K_i + U_i = \text{constante}$$

Anexo IV

Magnitudes Angulares

$$\text{Trabajo} \quad W_{ij}^A = W_{ij}^L - W_{ij}^R$$

$$\text{Energía Cinética} \quad K_{ij}^A = K_{ij}^L - K_{ij}^R$$

$$\text{Energía Potencial} \quad U_{ij}^A = U_{ij}^L - U_{ij}^R$$

$$\text{Energía Mecánica} \quad E_{ij}^A = E_{ij}^L - E_{ij}^R$$

$$\text{Lagrangiano} \quad L_{ij}^A = L_{ij}^L - L_{ij}^R$$

$$\text{Momento Angular} \quad \vec{P}_{ij} = m_{ij} [(\vec{r}_{ij} \times \vec{v}_{ij})/|\vec{r}_{ij}|]$$

$$\text{Energía Cinética} \quad K_{ij} = 1/2 m_{ij} [(\vec{r}_{ij} \times \vec{v}_{ij})/|\vec{r}_{ij}|]^2$$