

Oscillation of a rigid rod in the special relativity

Oscilado de rigida stango ĉe la speciala relativeco

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

Abstract

In the special relativity, a rigid rod slides upon itself, with one extremity oscillating harmonically. We discovered restrictions in the amplitude of the motion and in the length of the rod, essential to eliminate unphysical solutions.

Ĉe la speciala relativeco, rigida stango moviĝas sur si mem, kun unu fino oscilante harmonie. Ni malkovris limigaĵn kondiĉojn pri la amplitudo de movado kaj pri la longo de stango, necesgaj por elimini ne-fizikajn solvojn.

1 Enkonduko

Rigida stango komence ripozas, etendita sur akso x de inercia sistemo de referenco S_0 , inter pozicioj $x_a = 0$ kaj $x_b = L > 0$. En momento $t = 0$ la fino a komencas movadon $x_a(t_a)$ sur akso x . Ni nomas $[t_a, x_a]$ la postaj eventoj de a en sistemo S_0 .

La fino b rigide akompanas la movadon de a , ankaŭ sur la akso. Tio estas, b konservas la distancon L al a en la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco S_v kie a momente restas. Vidu [1], [2, paĝo 289], [3, paĝo 50], [4] – [7], pro detaloj pri rigida movado en speciala relativeco. Nomante $[t_b, x_b]$ la eventoj de b en sistemo S_0 , Nikolić [5] montris, ke en iu ajn movado $x_a(t_a)$ okazas

1 Introduction

A rigid rod is initially at rest, laying along the x -axis of an inertial system of reference S_0 , between the positions $x_a = 0$ and $x_b = L > 0$. In the moment $t = 0$ the extremity a starts a motion $x_a(t_a)$ on the x -axis. We call $[t_a, x_a]$ the succeeding events of a in the system S_0 .

The extremity b follows rigidly the motion of a , also on the axis. That is, b maintains the distance L to a in the successive inertial reference systems S_v where a is momentarily at rest. See [1], [2, page 289], [3, page 50], [4] – [7]), for details on the rigid motion in the special relativity. Calling $[t_b, x_b]$ the events of b in the system S_0 , Nikolić [5] showed that for any motion $x_a(t_a)$ one has

$$x_b = x_a + L\gamma, \quad t_b = t_a + \frac{L}{c^2}v\gamma; \quad v := v_a(t_a) = \frac{dx_a}{dt_a}, \quad \gamma := (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (1)$$

Simple kalkulo [8, Sek. 9] montras, ke dx_b/dt_b , en momento t_b , egalas dx_a/dt_a en momento t_a . Konsekvence, ĉiuj punktoj de la rigida stango restas en la sinsekvaj inerciaj sistemoj S_v .

Ni studas la okazon kun fino a de stango moviĝante harmonie en sistemo S_0 . Se A estas la duonamplitudo de movado, kaj ω estas la frekvenco, tial

$$x_a = A(1 - \cos \omega t_a). \quad (2)$$

Por tiu movado de a , la ne-harmonia movado de b estas esprimita per la parametro t_a kiel

$$x_b = x_a + \frac{L}{\sqrt{1 - (A\omega/c)^2 \sin^2 \omega t_a}}, \quad t_b = t_a + \frac{(AL\omega/c^2) \sin \omega t_a}{\sqrt{1 - (A\omega/c)^2 \sin^2 \omega t_a}}. \quad (3)$$

Sen perdi generalecon, ni konsideru $\omega = 1$ kaj $c = 1$ (vidu [10]). Tiu simpligas ekvaciojn (2) kaj (3) al

$$x_a = A(1 - \cos t_a), \quad x_b = x_a + \frac{L}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2 t_a}}, \quad t_b = t_a + \frac{AL \sin t_a}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2 t_a}}. \quad (4)$$

Tiel, la movado de b estas karakterizita per paro $[A; L]$. La duonamplitudo A estas limigita al $A < 1$, por eviti ke la rapido $A \sin t_a$ de a atingu valoron c . Ĉar $v_b(t_b) = v_a(t_a)$, tial ankaŭ la rapido de b neniam estos c . Ekzemple, la paro $[0,5; 1,8]$ generas movadojn por a kaj b kiel figuro 1a montras.

Tamen, la nura kondiĉo $A < 1$ ne tute eliminis ne-fizikajn solvojn de (4b) kaj (4c). Ekzemple, la paro $[A; L] = [0,8; 2,0]$ permesas finon b esti en eĉ 3 malsimilaj pozicioj x_b en sama momento t_b , kiel figuro 1b montras. Kaj la paro $[0,88; 0,90]$ permesas b esti samtempe en eĉ 5 malsimilaj lokoj, kiel figuro 1c montras.

Ĉar tiuj matematikaj rezultoj estas fizike neakcepteblaj, tial ni devas trovi pluaajn limigojn pri A kaj L . Ni profitas la evidentajn abruptajn malordojn en figuroj 1b kaj 1c, indikitaj per nigraj disketoj. Tiuj malordoj rezultas el nefiniaj akceloj, kiuj estas fizike neeblaj.

A simple calculation [8, Sec.9] shows that dx_b/dt_b , in moment t_b , is equal to dx_a/dt_a in moment t_a . Consequently, all points of the rigid rod are at rest in the successive inertial systems S_v .

We study the case with the extremity a of the rod moving harmonically in the system S_0 . If A is the half-amplitude of the motion, and ω is the frequency, then

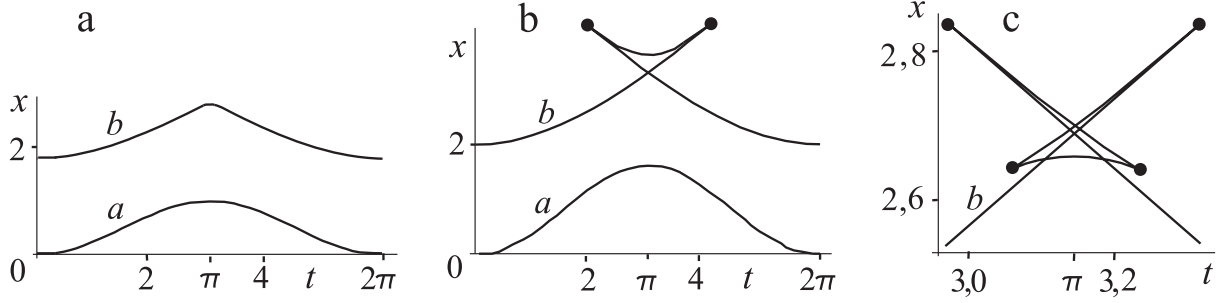
For that motion of a , the non-harmonic motion of b is expressed via the parameter t_a as

Without loss of generality, we consider $\omega = 1$ and $c = 1$ (see [10]). This simplifies equations (2) and (3) to

Thus the motion of b is characterized by a pair $[A; L]$. The semiamplitude A is bound to $A < 1$, to prevent velocity $A \sin t_a$ of a reaching the value c . Since $v_b(t_b) = v_a(t_a)$, then similarly the velocity of b will never be c . For example, the pair $[0,5; 1,8]$ generates motions for a and b as figure 1a shows.

However, the restriction $A < 1$ alone does not completely eliminate unphysical solutions of (4b) and (4c). For example, the pair $[A; L] = [0,8; 2,0]$ permits the extremity b be present in even 3 different positions x_b in a same moment t_b , as figure 1b shows. And the pair $[0,88; 0,90]$ permits b be simultaneously in even 5 different places, as figure 1c shows.

Since these mathematical results are physically unacceptable, we ought finding other limitations in A and L . We profit the evident abrupt disorders in the figures 1b and 1c, indicated by small black disks. These disorders result from infinite accelerations, which are physically impossible.



Figuro 1: Horizonta akso indikas la tempon $0 < t < 2\pi$ en inercia sistemo S_0 , kaj la vertikala akso montras la serion de pozicioj x_a (harmonia movado) kaj x_b (ne-harmonia movado). La ne-konstanta distanco inter b kaj a en sistemo S_0 estas mezurita vertikale. La klino de la trajektorioj evidentigas, ke ĉiu rapido estas plieta ol c . Nigra disketo (●) indikas eventon $[t_b, x_b]$ kie nefinia propra akcelo okazas.

a La paro de parametroj $[A; L] = [0,5; 1,8]$ generas movadojn fizike eblajn.

b La paro $[0,8; 2,0]$ permesas b sammomente esti en eĉ 3 malsimilaj lokoj, en tempa intervalo $2,0 < t < 4,3$. Do tiu movado estas ne-fizika.

c La paro $[0,88; 0,90]$ permesas b sammomente esti en eĉ 5 malsimilaj lokoj. Do tiu movado estas ne-fizika.

Figure 1: The horizontal axis indicates the time $0 < t < 2\pi$ of inertial system S_0 , and the vertical axis shows the successive positions x_a (harmonic motion) and x_b (non-harmonic motion). The variable distance between b and a in the system S_0 is measured vertically. The slope of the trajectories makes evident that all velocities are shorter than c . A black disk (●) indicates an event $[t_b, x_b]$ where an infinite proper acceleration occurs.

a The pair of parameters $[A; L] = [0,5; 1,8]$ generates motions physically possible.

b The pair $[0,8; 2,0]$ allows b be present in even 3 different places in a same moment, in the time interval $2,0 < t < 4,3$. Thus this motion is unphysical.

c The pair $[0,88; 0,90]$ allows b be present in even 5 different places, simultaneously. Thus this motion is unphysical.

2 Propra akcelo

Propra akcelo de punkto estas tiu akcelo mezurita en inercia sistemo de referenco kie la punkto momente restas. Vidu [1], [9, paĝo 22], [2, paĝo 13], [3, paĝo 49], [4], [5], por detaloj. Se la akcelo kaj la rapido de punkto estas paralelaj, tial la propra akcelo estas [8]

2 Proper acceleration

The proper acceleration of a point is the one measured in an inertial system where the point is momentarily at rest. See [1], [9, page 22], [2, page 13], [3, page 49], [4], [5], for details. If the acceleration and the velocity of the point are parallel, then the proper acceleration is [8]

$$g(t) := \frac{d}{dt} \left(\frac{dx/dt}{\sqrt{1 - (dx/dt)^2}} \right). \quad (5)$$

La fino a , kies movado $x_a(t_a)$ estas elektita en (4a), havas propran akcelon

The extremity a , whose motion $x_a(t_a)$ was chosen in (4a), has proper acceleration

$$g_a(t_a) = \frac{A \cos t_a}{(1 - A^2 \sin^2 t_a)^{3/2}}; \quad (6)$$

ni vidas, ke la akcelo g_a estas ĉiam finia.

Por koni la propran akcelon g_b de b ni uzas ankaŭ (5) kaj rememoras, ke $v_b(t_b) = v_a(t_a)$. La kalkulo do daŭrigas tiel:

$$g_b(t_b) = \frac{d}{dt_b} \left(\frac{v_a(t_a)}{\sqrt{1 - v_a^2(t_a)}} \right) = \left(\frac{dt_a}{dt_b} \right) \frac{d}{dt_a} \left(\frac{v_a(t_a)}{\sqrt{1 - v_a^2(t_a)}} \right) = \left(\frac{dt_a}{dt_b} \right) g_a(t_a) = \frac{g_a(t_a)}{dt_b/dt_a}. \quad (7)$$

Ĉar g_a estas ĉiam finia, tial g_b estas nefinia nur en momentoj t_b tiaj ke la nomanto dt_b/dt_a en (7) estas nula. Uzante (4c) ni vidas, ke la respondaj momentoj t_a obeas

$$AL \cos t_a + (1 - A^2 \sin^2 t_a)^{3/2} = 0. \quad (8)$$

Tio implicas $\cos t_a < 0$, tial $\pi/2 < t_a < 3\pi/2$.

Ekzemple, la paro $[A = 0,8; L = 2,0]$ en (8) oferas solvon $\cos t_a = -0,143$, ekvivalente $t_{a1} = 1,7$ kaj $t_{a2} = 4,6$; uzante (4c), tiuj t_a donas $t_{b1} = 2,0$ kaj $t_{b2} = 4,3$; kaj uzante (4b) ili donas $x_{b1} = x_{b2} = 4,2$. Fakte en figuro 1b ni vidas, ke la eventoj $[t_{b1}, x_{b1}]$ kaj $[t_{b2}, x_{b2}]$ markas finojn de duobleco de movadoj de b , en sistemo S_0 .

3 La fizikaj okazoj

Ni volas elmontri, klare kaj precize, la parojn $[A; L]$ fizike eblaj. Por tio, ni komence desegnas grafikaĵojn de dt_b/dt_a kiel funkcio de t_a por pluraj valoroj de paro $[A; L]$, kiel en figuro 2. En tiu figuro ni vidas, ke nur subfiguroj 3, 6 kaj 7 havas dt_b/dt_a neniam nula, do estas la nuraj fizike eblaj.

Se ni atentis la serion de subfiguroj $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ni vidas, ke dt_b/dt_a unue estas nula en subfiguro 2, en $t_a = \pi$, kiam ankaŭ $d^2t_b/dt_a^2 = 0$. Tiu lasta ekvacio, uzante $t_b(t_a)$ oferita en (4c), ekvivalentas

$$(3A^2 - 1 - 2A^2 \sin^2 t_a) \sin t_a = 0. \quad (9)$$

Ekvacio (9) helpas koni la fizike eblajn okazojn. Portante al (8) la solvon $\sin t_a = 0$ de (9), ni ricevas la hiperbolon

$$L = \frac{1}{A}, \quad (10)$$

we see that the acceleration g_a is always finite.

To know the proper acceleration g_b of b we use also (5), and remember that $v_b(t_b) = v_a(t_a)$. The calculus then proceeds thus:

$$g_b(t_b) = \frac{d}{dt_b} \left(\frac{v_a(t_a)}{\sqrt{1 - v_a^2(t_a)}} \right) = \left(\frac{dt_a}{dt_b} \right) \frac{d}{dt_a} \left(\frac{v_a(t_a)}{\sqrt{1 - v_a^2(t_a)}} \right) = \left(\frac{dt_a}{dt_b} \right) g_a(t_a) = \frac{g_a(t_a)}{dt_b/dt_a}. \quad (7)$$

Since g_a is always finite, g_b is infinite only in moments t_b such that the denominator dt_b/dt_a in (7) is null. Using (4c), we see that the corresponding moments t_a obey

$$AL \cos t_a + (1 - A^2 \sin^2 t_a)^{3/2} = 0. \quad (8)$$

This implies $\cos t_a < 0$, so $\pi/2 < t_a < 3\pi/2$.

For example, the pair $[A = 0,8; L = 2,0]$ in (8) has solution $\cos t_a = -0,143$, or equivalently $t_{a1} = 1,7$ and $t_{a2} = 4,6$; using (4c), these t_a give $t_{b1} = 2,0$ and $t_{b2} = 4,3$; and using (4b) they give $x_{b1} = x_{b2} = 4,2$. In fact, in figure 1b we see that the events $[t_{b1}, x_{b1}]$ and $[t_{b2}, x_{b2}]$ mark endpoints of duplicity of motions of b , in the system S_0 .

3 The physical cases

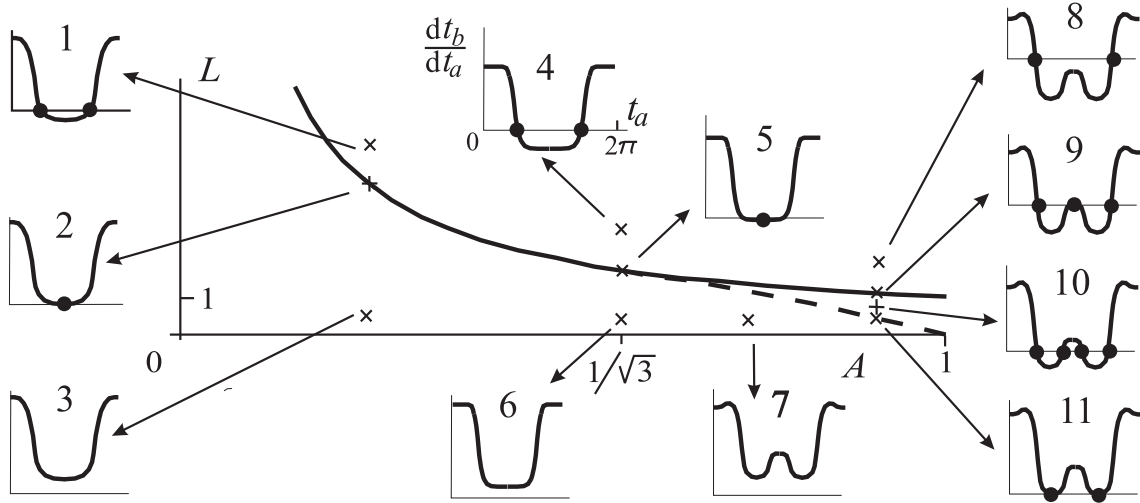
We want to exhibit, with clarity and precision, the pairs $[A; L]$ physically possible. To that end, we start drawing graphics of dt_b/dt_a against t_a for a large number of values of the pair $[A; L]$, as in figure 2. In that figure, we see that only the subfigures 3, 6 and 7 do not have zeros of dt_b/dt_a , so they are the sole physically possible.

If we regard the sequence of subfigures $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ we see that one zero one dt_b/dt_a first emerges in subfigure 2, in $t_a = \pi$, where also $d^2t_b/dt_a^2 = 0$. This last equation, using $t_b(t_a)$ given in (4c), is equivalent to

$$(3A^2 - 1 - 2A^2 \sin^2 t_a) \sin t_a = 0. \quad (9)$$

Equation (9) helps knowing the cases physically possible. Bringing into (8) the solution $\sin t_a = 0$ of (9), we get the hyperbola

$$L = \frac{1}{A}, \quad (10)$$



Figuro 2: En la centra grafikaĵo estas hiperbolo $L = 1/A$ per kontinua linio, kaj parabolo $L = (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$ se $A > 1/\sqrt{3}$ per strekita linio. Ĉirkaŭe estas 11 skizoj de la kvalite malsimilaj grafikaĵoj de dt_b/dt_a kiel funkcio de t_a , dissemitaj en ebena $(A; L)$. Nigra disketo (●) indikas nefinian propran akcelon ($dt_b/dt_a = 0$). Nur grafikaĵoj 3, 6, kaj 7 estas fizike eblaj.

Figura 2: In the central graph are the hyperbola $L = 1/A$ in full line, and the parabola $L = (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$ if $A > 1/\sqrt{3}$ in dashed line. Around are 11 sketches of those graphs qualitatively different of dt_b/dt_a as function of t_a , distributed in the plane $(A; L)$. A black disk (●) indicates infinite proper acceleration ($dt_b/dt_a = 0$). Only the graphs 3, 6, and 7 are physically possible.

desegnita per kontinua linio en la centra grafikaĵo de figuro 2. La paroj $[A; L]$ sur aŭ super tiu hiperbolo donas solvojn fizike neblaj. Por esplori la parojn sub la hiperbolo, ni bezonas konsideri la alian solvon de (9).

Tiu alia solvo estas $2A^2 \sin^2 t_a = 3A^2 - 1$. Ĝi gravas se nur $A > 1/\sqrt{3}$, celante ke $\sin t_a$ estu reela. Uzante tiun solvon en (8), ni ricevas la arkon de parabolo

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1 - A^2), \quad 1/\sqrt{3} < A < 1, \quad (11)$$

montrita per la strekita linio en la centra grafikaĵo en figuro 2.

Resume, la paroj $[A; L]$ fizike eblaj havas $L < 1/A$ se $A < 1/\sqrt{3}$, kaj havas $L < (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$ se $1/\sqrt{3} < A < 1$.

Ni konfirmas tiun konkludon atentante la serion $7 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8$; tie ni vidas, ke dt_b/dt_a ne nuliĝas en subfiguro 7, kaj unue nuliĝas en subfiguro 11, kie ankaŭ

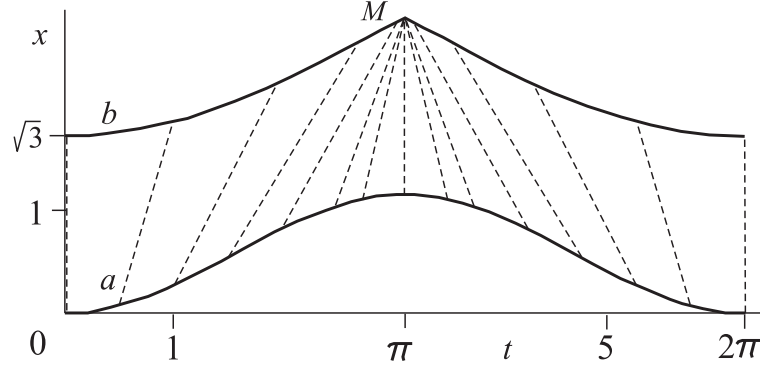
drawn in full line in the central graphic of the figure 2. The pairs $[A; L]$ on or above that hyperbola give solutions physically impossible. To explore the pairs under the hyperbola, we need consider the other solution of (9).

That other solution is $2A^2 \sin^2 t_a = 3A^2 - 1$. It matters only if $A > 1/\sqrt{3}$, so that $\sin t_a$ be real. Using that solution in (8), we get the arc of parabola

shown by the dashed line in the central graph of figure 2.

In short, the pairs $[A; L]$ physically possible have $L < 1/A$ if $A < 1/\sqrt{3}$, and have $L < (3\sqrt{3}/2)(1 - A^2)$ if $1/\sqrt{3} < A < 1$.

We confirm that conclusion in the sequence $7 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8$; there we see that dt_b/dt_a has no zero in the subfigure 7, and starts having zero in the subfigure 11, where



Figuro 3: Movadoj de b kaj a se $A = 1/\sqrt{3}$ kaj $L = \sqrt{3}$. La strekitaj linioj kunigas parojn de samtempaj eventoj en la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco kie a kaj b momente restas. Ni atentigas amason de apartaj eventoj ĉe a kiuj estas preskaŭ samtempaj al evento $M = [\pi, 2A + L]$ ĉe b , en tiuj sistemoj.

Figure 3: Motions of b and a if $A = 1/\sqrt{3}$ and $L = \sqrt{3}$. The dashed lines connect pairs of simultaneous events in the successive inertial reference systems where a and b are momentarily at rest. We remark a large quantity of separated events of a that are almost simultaneous to the event $M = [\pi, 2A + L]$ of b , in these systems.

$d^2t_b/dt_a^2 = 0$ – vidu la du nigrajn disketojn sur la strekata linio. Se ni pligrandigas L , ĉiu disketo tuj fariĝas du, kiel en subfiguro 10. Pli-grandigante L , la du internaj disketoj proksimiĝas kaj fine unuiĝas kiel en subfiguro 9, kie denove $d^2t_b/dt_a^2 = 0$ en $t_a = \pi$. Fine, se L estas malmulte pligranda, tiu centra disketo malaperas, kiel en subfiguro 8.

Ankaŭ la serio $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ estas interesa. Ĝi okazas en vertikalo $A = 1/\sqrt{3}$, kaj havas d^3t_b/dt_a^3 nulan se $t_a = \pi$. Do ĉiuj kurboj dt_b/dt_a kun $A = 1/\sqrt{3}$ havas nulan kurbecon en $t_a = \pi$, kiel ni vidas en figuro 2.

also $d^2t_b/dt_a^2 = 0$ – see the two black disks on the stretched line. If we increase L , each disk soon becomes two disks, as in subfigure 10. Increasing L a little more, the two disks approach and finally melt as in subfigure 9, where again $d^2t_b/dt_a^2 = 0$ in $t_a = \pi$. Eventually, if L is a little larger, that central disk disappears, as in subfigure 8.

Also the sequence $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ is interesting. It occurs in the vertical $A = 1/\sqrt{3}$, and has the derivatives d^3t_b/dt_a^3 null in $t_a = \pi$. So all curves dt_b/dt_a with $A = 1/\sqrt{3}$ have null curvature in $t_a = \pi$, as we see in figure 2.

4 Komentoj

Klarigo indas emfazon: la egaleco $v_b(t_b) = v_a(t_a)$ ne signifas, ke la rapidoj de a kaj b estas egalaj en sama momento de inercia sistemo S_0 . Fakte, la egaleco $v_b(t) = v_a(t)$ okazas nur kiam $t_b = t_a$. Atentante (4c), tio implicas $t_a = 0, \pi, 2\pi, \dots$ Nur en tiuj momentoj t_a , la rigida stango estas senmova en S_0 , kaj elmontras sian propralongojn L en S_0 .

Subfiguro 5 de figuro 2 evidentiĝas, ke la

4 Comments

A clarification deserves emphasis: the equality $v_b(t_b) = v_a(t_a)$ does not mean that the velocities of a and b are equal in a same moment in the inertial reference system S_0 . In fact, the equality $v_b(t) = v_a(t)$ occurs only when $t_b = t_a$. According to (4c), that implies $t_a = 0, \pi, 2\pi, \dots$ Only in these moments t_a , the rigid rod is immobile in S_0 , and exhibits its properlength L in S_0 .

Subfigure 5 of figure 2 makes evident that

okazo $A = 1/\sqrt{3}$ kaj $L = \sqrt{3}$ estas speciala. La plateco de kurbo dt_b/dt_a en akso t_a implikas amason de nulaj valoroj de dt_b/dt_a ĉirkaŭ $t_a = \pi$. Fakte, figuro 3 montras, ke tiuokaze multaj apartaj eventoj de fino a estas preskaŭ samtempaj al evento $M := [\pi; 2A + L]$ ĉe b , en la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco kie ambaŭ a kaj b restas.

Fine indas menci, ke la unu sola punkto kun harmonia movado en la rigida stango povus esti interna, anstataŭ fina. Tiu ĉi artikolo estus facile adaptita por priskribi tiun pli ĝeneralan okazon.

the case $A = 1/\sqrt{3}$ and $L = \sqrt{3}$ is special. The flattening of the curve dt_b/dt_a on the axis t_a implies a large number of zeros of dt_b/dt_a near $t_a = \pi$. Indeed, figure 3 shows that in this case many separated events of the extremity a are almost simultaneous to the event $M := [\pi; 2A+L]$ of b , in the successive inertial systems where both a and b are at rest.

Finally, it is worth mentioning that the sole point with harmonic motion in the rigid rod could be interior, instead of an extremity. This article would be easily adapted to describe that more general case.

Citaĵoj

References

- [1] M. Born, *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips*, Annalen der Physik **335** (11) 1-56 (1909); [http://wikisource.org/wiki/The Theory of the Rigid Electron in the Kinematics of the Principle of Relativity](http://wikisource.org/wiki/The_Theory_of_the_Rigid_Electron_in_the_Kinematics_of_the_Principle_of_Relativity) .
- [2] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed.*, Oxford U.P. (1972).
- [3] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed.*, Springer-Verlag (1977).
- [4] C. Giannoni, Ø. Grøn, *Rigidly connected accelerated clocks*, Am. J. Phys. **47** (1979) 431-435.
- [5] H. Nikolić, *Relativistic contraction of an accelerated rod*, arXiv:physics/9810017v3 .
- [6] J. Franklin, *Lorentz contraction, Bell's spaceships, and rigid body motion in special relativity*, arXiv:0906.1919; *Rigid body motion in special relativity*, arXiv:1105.3899 .
- [7] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – II*, arXiv:1107.1399 .
- [8] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – I*, arXiv:physics/0603053; please correct eq.(5) to $\tan^2(\alpha/2) = \sqrt{(c+v)/(c-v)}$.
- [9] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields, 4th revised English edition*, Butterworth-Heinemann (1996).
- [10] Por ricevi (2) kaj (3), substituu $x_a \rightarrow \omega x_a/c$, $x_b \rightarrow \omega x_b/c$, $A \rightarrow \omega A/c$, $L \rightarrow \omega L/c$, $t_a \rightarrow \omega t_a$, $t_b \rightarrow \omega t_b$.