

La relativeca tempo – I — The relativistic time – I

F.M. Paiva

Departamento de Física, Unidade Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

14-a de Marto de 2006

Resumo

La relativeca tempo estas malsama ol la Newtona. Ni revidas iujn el tiuj malsamaj en Dopplera efiko, ĝemel-paradokso, rotacio, rigida stango, kaj konstanta propra akcelo.

The relativistic time is different from the Newtonian one. We review some of these differences in Doppler effect, twin paradox, rotation, rigid rod, and constant proper acceleration.

1 Enkonduko

Astronomiaj observoj antaŭ longe montris, ke la rapido c de lumo en vakuo ne dependas de la rapido de fonto nek de la rapido de observanto; ĉi tiu konstato generis en 1905 la relativecan teorion (specialan) kaj poste la konvencion [1]: la rapido de lumo en vakuo estas senerare $c := 299.792.458 \text{ m/s}$. Tiu konvencio kunigas *metron* kun *sekundo*, t.e., la ekzisto de la universala konstanto c iele unuigas tempon kun spaco. Tamen, ĉiutage oni preferas distingi la konceptojn de intertempo kaj de interspaco; eble ĉar $1s$, kiu estas intertempo konvena por la homa skalo, samvaloras interspacon tro granda por nia skalo.

Aliaj eksperimentoj [2] montris, ke la *rapido* de luma fonto ŝanĝas la periodon de observata lumo (Dopplera efiko), malgraŭ ke la *akcelo* ne ŝanĝas ĝin. Tiuj faktoj forte sugestis la uzon de elektromagneta radiado por difini unuon de intertempo [1], [3, paĝo 28]: se-

1 Introduction

Astronomical observations have shown long ago that the speed c of light in vacuum does not depend on the speed of the source, nor on the speed of the observer; this fact gave birth in 1905 to the (special) theory of relativity, and later to the convention [1]: the speed of light in vacuum is exactly $c := 299.792.458 \text{ m/s}$. This convention ties *metre* with *second*, i.e., the existence of the universal constant c somehow unites time and space. However, in everyday life one prefers distinguish the concepts of time and space; possibly because $1s$, which is a time interval convenient for the human scale, corresponds to a distance too large for our scale.

Other experiments [2] have shown that the *speed* of a light source changes the period of the light observed (Doppler effect), although the *acceleration* does not change it. These facts strongly suggested the use of electromagnetic radiation to define a unit of time interval [1], [3,

kundo (intervala unuo $\Delta\tau$ de *proprate*) estas la daŭro de 9.192.631.770 periodoj de la lumo igita el atomo de cezio-133, je la transiro inter du specifaj niveloj. El la difinoj de c kaj de *sekundo* rezultis, ke *metro* estas la distanco ke lumo traruras en vakuo dum la frakcio $1/299.792.458$ de *sekundo* [1, 4].

Horloĝo fide montranta la sinsekvon de la sekundoj nomiĝas *normohorloĝo*, aŭ simple *horloĝo* [5, paĝo 107]. La plej fidindaj horloĝoj estas la ellaborataj atomohorloĝoj. Tamen la familiara brakhorloĝo estas ankaŭ normohorloĝo, se ni ne postulas tro precizan mezuron de tempo.

Konvenas memori, ke la horloĝa takto ne estas absoluta, laŭ la jena senco. Imagu du komence apudajn sinkronajn horloĝojn. Poste apartigu kaj submetu ilin al malsamaj kondiĉoj de rapido kaj de gravita potencialo. Ĉiu horloĝo daŭrigos registri la fluon de *sia* proprate, pere de la akumulado de *siaj* sekundoj. En eventuala renkonto de la horloĝoj, la du akumulitaj registraĵoj probable estos malsamaj.

En la sekvantaj sekcioj ni raportos iujn tempajn fenomenojn ĉe la special-relativeca kunteksto. Ni studos la tempon ĉe eksperimentaj rezultoj, Dopplera efiko, ĝemel-paradokso, sinkronigo kiel Einstein, horloĝoj en rekta movado, horloĝoj en cirkla movado, periodo, rigida stango, kaj konstanta propra akcelo.

Indas citi Rindler [6, paĝo 44], kiu emfazis ke “tempa dilato, same kiel spaca maldilato, estas *real*”. Sekve ĉiu, kiun ni diras pri normohorloĝa takto, supoze validas por ĉia ajn fizika fenomeno.

2 Eksperimentaj rezultoj

Ni komence mencias du eksperimentajn rezultojn kiuj konfirmas specialan relativecon.

2.1 Muona disiĝo

La malrapideco de moviĝantaj horloĝoj estas

page 28]: *second* (an interval unit $\Delta\tau$ of *proprate*) is the duration of 9.192.631.770 periods of the light emitted from an atom of cesium-133, in the transition between two specific levels. From the definitions of c and *second*, it resulted that *metre* is the distance that light traverses in vacuum in the fraction $1/299.792.458$ of a *second* [1, 4].

A clock that faithfully shows the succession of the seconds is called a *standard clock*, or simply a *clock* [5, page 107]. The most faithful clocks are the sophisticate atomic clocks. However the popular wristclock is also a standard clock, if we do not demand a too precise time measurement.

It is worth remembering that the pace of a clock is not absolute, in the following sense. Suppose two clocks initially close, and synchronous. Then separate and submit them to different conditions of speed and gravitational potential. Each clock keeps registering the flow of *its* proptime, through the accumulation of *its* seconds. In an eventual reencounter of the clocks, the two accumulated readings probably will be different.

In the following sections we shall discuss some time phenomena in the special relativistic context. We shall study the time in experimental results, Doppler effect, twin paradox, Einstein synchronization, clocks in rectilinear motion, clocks in circular motion, period, rigid rod, and constant proper acceleration.

Worth citing Rindler [6, page 44], who emphasized that “time dilation, like length contraction, is *real*”. As a consequence, all we say about pace of clocks is supposed valid for any physical phenomenon.

2 Experimental results

We initially mention two experimental results that confirm special relativity.

2.1 Muon disintegration

The slowness of clocks in motion is observed in

observata ĉe la defalo de muonoj kiuj estas kreataj en alta tera atmosfero kaj disiĝas en siaj trajektorioj al detektiloj en malplia altitudo. Ja, la muona meza-vivo estas $\Delta\tau \approx 2,22\mu s$ (propratempe). Laŭ la Newtona kinematiko, tiuj muonoj, eĉ se vojaĝus kun rapido c , devus trakuri apenaŭ ĉirkaŭ $700m$ antaŭ disiĝi; do nur sensignifa procento de ili devus esti trovata en marnivelo. Tamen, la procento detektitita tie estas multe pli granda [7, paĝo 702]. La relativeca motivo estas, ke muonoj vojaĝantaj kun rapido $v = 0,9999c$ vivas ĉirkaŭ $70\Delta\tau$, kiel mezurita per horloĝo ripozanta ĉe grundo. Do tiuj muonoj povas vojaĝi ĉirkaŭ $50km$ antaŭ disiĝi, kio eksplikas ĝian abundan detektadon en ankaŭ malgranda altitudo.

2.2 Ciklotrono

La special-relativeco ankaŭ korekte pritraktas la malrapidecon de la evoluo de sistemoj kun rapida cirkla movado en la interno de ciklotrono. Ja, nefirmaj partikloj havante mallongajn meza-vivojn prezentas grandan postvivon ĉe tiuj kondiĉoj [8]. Tio estas eksplikata denove per la relativeca tempa dilato.

3 Doppleraj efikoj

Imagu ke mi havas ĉe mi horloĝon \mathcal{H} , kiu montras la fluon de mia propratempe τ . Mi estas rigardanta alian horloĝon \mathcal{H}' , kiu montras la fluon de sia propratempe τ' . La horloĝo \mathcal{H}' moviĝas kun vektora rapido \mathbf{v} en inercia referenca sistemo kie \mathcal{H} restas. Dum mi **vidas** (nudokule aŭ dulornete aŭ teleskope) ke la monstro de \mathcal{H}' pligrandiĝas $d\tau'$, la monstro de \mathcal{H} pligrandiĝas $d\tau_p \neq d\tau'$. Ni uzas la subsignon p (post) en $d\tau_p$ por memori, ke dum $d\tau'$ estas la propra intertempo inter du lumaj eligoj de \mathcal{H}' , kontraŭe $d\tau_p$ estas la propra intertempo inter la alvenoj de tiuj signaloj al \mathcal{H} . Tiu malsamo de monstroj *ĉiam* havas relativecan faktoron (“tempa dilato”), multiplikante la ordinaran nerelativecan Doppleran faktoron. La rilato inter $d\tau_p$ kaj $d\tau'$ pendas de la modulo de la rapido \mathbf{v} ,

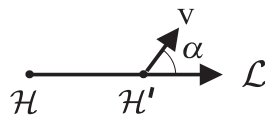
the decay of muons that are created in the high terrestrial atmosphere and disintegrate in their path towards detectors in lower altitude. Indeed, the muon lifetime is $\Delta\tau \approx 2,22\mu s$ (proprertime). According to the Newtonian kinematics these muons, even running at speed c , should travel some $700m$ only, before disintegrating; so only a few percent of them should be found at sealevel. Nevertheless, the quantity detected there is much larger [7, page 702]. The relativistic reason is that muons travelling at speed $v = 0,9999c$ live nearly $70\Delta\tau$, as measured by a clock at rest on the ground. So these muons can travel nearly $50km$ before disintegrate, what explains their profuse detection also at low altitude.

2.2 Cyclotron

The special relativity deals also correctly the lenthitude of the evolution of systems in fast circular motion inside a cyclotron. Really, unstable particles with short lifetimes show a large surviving under these conditions [8]. That is again explained by the relativistic time dilation.

3 Doppler effects

Suppose I have with me a clock \mathcal{H} , that shows the flow of my proprertime τ . I am looking to another clock \mathcal{H}' , that shows the flow of its proprertime τ' . The clock \mathcal{H}' is moving with vector speed \mathbf{v} in an inertial reference system where \mathcal{H} rests. While I **see** (with naked eyes, or through a binocular, or through a telescope) that the reading of \mathcal{H}' increases $d\tau'$, the reading of \mathcal{H} increases $d\tau_p \neq d\tau'$. We use the subindex p (post) in $d\tau_p$ to remember that while $d\tau'$ is the interval of proprertime between two light emissions from \mathcal{H}' , $d\tau_p$ is the proprertime interval between the arriving of these signals to \mathcal{H} . That difference of readings *always* has a relativistic factor (“time dilation”), multiplying the usual nonrelativistic Doppler factor. The relation between $d\tau_p$ and $d\tau'$ depends on the



Figuro 1: La horloĝoj \mathcal{H} (mia, ripozanta) kaj \mathcal{H}' (moviĝanta).
 Figure 1: The clocks \mathcal{H} (mine, at rest) and \mathcal{H}' (in motion).

kaj de la angulo α inter \mathbf{v} kaj la vida rekto \mathcal{L} de \mathcal{H} al \mathcal{H}' . Vidu figuron 1.

Nun ni rilatas $d\tau'$ al $d\tau_p$ ĉe kvin okazoj de Dopplera efiko. Ni vidas ke en tiuj okazoj la relativeca kaj la Newtona antaŭvidoj koincidas nur en unua ordo de v/c .

modulus of speed \mathbf{v} , and on the angle α between \mathbf{v} and the line of sight \mathcal{L} from \mathcal{H} to \mathcal{H}' . See the figure 1.

We now relate $d\tau'$ to $d\tau_p$ in five cases of Doppler effect. We shall see that in these cases the relativistic and Newtonian predictions coincide only in first order of v/c .

3.1 Transverso, $\alpha = \pi/2$

Se $\alpha = \pi/2$, la horloĝo \mathcal{H}' momente moviĝas flanke rilate al mi, do la distanco inter ni estas momente konstanta. Mi vidas, ke dum la monstro de mia \mathcal{H} pligrandiĝas $d\tau_p$, la monstro de \mathcal{H}' pligrandiĝis apenaŭ [9, paĝo 118]

3.1 Transverse, $\alpha = \pi/2$

If $\alpha = \pi/2$, the clock \mathcal{H}' momentarily moves sideways relative to me, so the distance between us is momentarily constant. I see that while the reading of my \mathcal{H} increases $d\tau_p$, the reading of \mathcal{H}' has increased only [9, page 118]

$$d\tau' = \sqrt{1 - v^2/c^2} d\tau_p. \quad (1)$$

Tiu malsamo de monstroj nomiĝas transversa Dopplera efiko. Ĝi ankaŭ nomiĝas alruĝo, ĉar ordinara lumo irigita el \mathcal{H}' ŝajnas delokita al ruĝo, kiam vidata per mi. La nerelativeca antaŭvido estas $d\tau' = d\tau_p$, tial la transversa Dopplera efiko estas dirita nemikse relativeca.

That difference of readings is called transverse Doppler effect. It is also called redshift, because ordinary light emitted from \mathcal{H}' appears shifted towards the red, as seen by me. The nonrelativistic prediction is $d\tau' = d\tau_p$, so the transverse Doppler effect is said purely relativistic.

3.2 Foriĝo, $\alpha = 0$

Se $\alpha = 0$, la horloĝo \mathcal{H}' radiuse foriĝas de mi. Dum la monstro de mia \mathcal{H} pligrandiĝas $d\tau_p$, mi vidas ke la monstro de \mathcal{H}' pligrandiĝis apenaŭ [9, paĝo 117]

3.2 Removal, $\alpha = 0$

If $\alpha = 0$, the clock \mathcal{H}' is radially moving away from me. While the reading of my \mathcal{H} increases $d\tau_p$, I see that the reading of \mathcal{H}' has increased only [9, page 117]

$$d\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} d\tau_p = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} d\tau_p. \quad (2)$$

Ni rimarkas, ke la relativeca Dopplera efiko ĉe foriĝo estas pli forta ol tiu ĉe transversa movado (1), kun sama rapido v . Nerelativece, $d\tau' = d\tau_p/(1 + v/c)$. Ĉar en ambaŭ teorioj, relativeca

We remark that the relativistic Doppler effect of removal is stronger than that of transverse motion (1), with same speed v . Nonrelativistically, $d\tau' = d\tau_p/(1 + v/c)$. Since in both theo-

kaj nerelativeca, veriĝas $d\tau' < d\tau_p$, tial ambaŭ antaŭvidas alruĝon. Rimarku, ke la relativeca variado $d\tau_p - d\tau'$ de foriĝo (2) estas pli granda ol la nerelativeca.

ries, relativistic and nonrelativistic, it happens $d\tau' < d\tau_p$, both predict redshift. Remark that the relativistic shift $d\tau_p - d\tau'$ of removal (2) is larger than the nonrelativistic one.

3.3 Alproksimiĝo, $\alpha = \pi$

Se $\alpha = \pi$, la horloĝo \mathcal{H}' radiuse proksimiĝas al mi. Nun mi vidas la montron de \mathcal{H}' pligrandiĝi pli rapide ol tiun de mia \mathcal{H} . Dum la montro de mia \mathcal{H} pligrandiĝas $d\tau_p$, mi vidas ke la montro de \mathcal{H}' pligrandiĝis [9, paĝo 117],

$$d\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} d\tau_p = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} d\tau_p. \quad (3)$$

Nerelativece $d\tau' = d\tau_p/(1 - v/c)$. Tiu efiko nomiĝas Dopplera de radiusa alproksimiĝo, aŭ albluo. Kontraŭe okazo 3.2 (foriĝo), la relativeca albluo $d\tau' - d\tau_p$ estas malpli forta ol la nerelativeca.

Pasante, rimarku en (3) la *faktoron k* de Bondi [10, paĝo 387], $\sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$.

3.3 Approaching, $\alpha = \pi$

If $\alpha = \pi$, the clock \mathcal{H}' is radially approaching me. Now I see the reading of \mathcal{H}' increase faster than that of my \mathcal{H} . While the reading of my \mathcal{H} increases $d\tau_p$, I see that the reading of \mathcal{H}' has increased [9, page 117],

Nonrelativistically $d\tau' = d\tau_p/(1 - v/c)$. That effect is called Doppler of radial approach, or blueshift. Oppositely to the case 3.2 (removal), the relativistic blueshift $d\tau' - d\tau_p$ is weaker than the nonrelativistic.

By the way, remark in (3) the *k factor* of Bondi [10, page 387], $\sqrt{(1 + v/c)/(1 - v/c)}$.

3.4 Ĝeneralo, $\alpha = \text{iom ajn}$

Ĉi tiu okazo kunigas la 3 antaŭajn okazojn, kaj ilin ĝeneraligas. Dum la montro de mia \mathcal{H} pligrandiĝas $d\tau_p$, mi vidas ke tiu de \mathcal{H}' pligrandiĝis [9, paĝo 118]

$$d\tau' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \alpha} d\tau_p. \quad (4)$$

Nerelativece $d\tau' = d\tau_p/[1 + (v/c) \cos \alpha]$. Simpla kalkulo montras ke se $0 \leq |\alpha| < \pi/2$, la nerelativeca kaj la relativeca antaŭvidoj ambaŭ estas alruĝo ($d\tau' < d\tau_p$). Sed se $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$, la analizo estas malpli simpla: Newtonne ĉiam okazas albluo ($d\tau' > d\tau_p$), kontraŭe relativece okazas ankaŭ albluo se nur la rapido de \mathcal{H}' estas sufiĉe malgranda, $v/c < 2/|\cos \alpha + \sec \alpha|$; se tamen la rapido estas pli granda, la relativeca teorio antaŭvidas alruĝon ($d\tau' < d\tau_p$), kvankam la distanco de \mathcal{H}' al \mathcal{H} plietiĝas.

3.4 General, $\alpha = \text{any}$

This case encompasses the 3 preceding ones, and generalizes them. While the reading of my \mathcal{H} increases $d\tau_p$, I see that the reading of \mathcal{H}' has increased [9, page 118]

Nonrelativistically $d\tau' = d\tau_p/[1 + (v/c) \cos \alpha]$. A simple calculus shows that if $0 \leq |\alpha| < \pi/2$, the nonrelativistic and the relativistic predictions both are redshift ($d\tau' < d\tau_p$). But if $\pi/2 < |\alpha| \leq \pi$, the analysis is less simple: Newtonianly it always happens blueshift ($d\tau' > d\tau_p$), while relativistically it also happens blueshift only if the speed of \mathcal{H}' is low enough, $v/c < 2/|\cos \alpha + \sec \alpha|$; if however the speed is higher, relativity predicts redshift ($d\tau' < d\tau_p$), even though the distance between \mathcal{H}' and \mathcal{H} is decreasing.

3.5 Logaritma spiralo

Ni rimarkas ke en (1), en kiu $\alpha = \pi/2$, veriĝas $d\tau' < d\tau_p$, kaj ke en (3), en kiu $\alpha = \pi$, veriĝas $d\tau' > d\tau_p$. Do, trudante $d\tau' = d\tau_p$ en (4), ni trovas la mezan valoron de α en la intervalo $(\pi/2, \pi)$ kiu momente nuligas la relativecan Doppleran efikon:

$$\tan^2(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}. \quad (5)$$

Tiu α pendas nur de la rilato v/c , kaj estas plikompakte skribita kiel

$$\cos \alpha = -\tanh(\xi/2), \quad \tanh \xi := v/c. \quad (6)$$

Por daŭre esti $d\tau' = d\tau_p$ kun v konstanta, α bezonas esti konstanta. En tiu okazo, estante \mathcal{H} en la origino $r = 0$, la trajektorio de \mathcal{H}' estas konverĝa logaritma spiralo:

$$r = r_0 \exp[-|\varphi| \sinh(\xi/2)]. \quad (7)$$

Tiu ĉi rezulto kontrastas kun tiu de nerelativeca teorio, kiu diras, ke la Dopplera efiko nuliĝas, $d\tau' = d\tau_p$, nur se la luma fonto moviĝas cirkle, $\alpha = \pm\pi/2$.

3.5 Logarithmic spiral

We remark that in (1), where $\alpha = \pi/2$, it happens $d\tau' < d\tau_p$, and that in (3), where $\alpha = \pi$, it happens $d\tau' > d\tau_p$. So, setting $d\tau' = d\tau_p$ in (4), we find the intermediate value of α in the range $(\pi/2, \pi)$ that momentarily makes zero the relativistic Doppler effect:

That α depends only on the ratio v/c , and is written more compactly as

To be permanently $d\tau' = d\tau_p$ with v constant, α needs be constant. In this case, if \mathcal{H} is at the origin $r = 0$, the trajectory of \mathcal{H}' is a convergent logarithmic spiral:

This result contrasts with that of the nonrelativistic theory, which says that the Doppler effect is null, $d\tau' = d\tau_p$, only if the light source has circular motion, $\alpha = \pm\pi/2$.

4 Ĝemel-paradokso

Multe klarigan analizon de la horloĝ-paradokso (aŭ ĝemel-) faris Darwin [11], uzante la esprimojn (2) kaj (3). Estiĝu komence apudaj, du ripozantaj horloĝoj \mathcal{H} kaj \mathcal{H}' , kaj estiĝu punkto P fiksita 4 lumjaroj for.

En iu momento, \mathcal{H}' ekforiras direkte al P , kun konstanta rapido $v = 4c/5$, dum \mathcal{H} daŭre ripozas. Dum la foriro, ĉiu horloĝo vidas (nudo-kule aŭ dulornete aŭ teleskope) ke la takton de la alio estas pli malrapide ol la sian, ĉe la relativeca rilato $\sqrt{1-v/c} \div \sqrt{1+v/c} = \dots = 1/3$, kiel en ek. (2); t.e., horloĝo kies montro pli-grandiĝas 1 horon vidas, ke la montro de la alio

4 Twin paradox

A very clarifying analysis of the clock (or twin) paradox was made by Darwin [11], using the expressions (2) and (3). Let two clocks \mathcal{H} and \mathcal{H}' be initially close and at rest, and let a point P be fixed 4 light-years away.

In some moment, \mathcal{H}' departs towards P , at constant speed $v = 4c/5$, while \mathcal{H} remains at rest. During the removal, each clock sees (with naked eyes, or through a binocular, or through a telescope) the pace of the other to be slower than his own, at the relativistic ratio $\sqrt{1-v/c} \div \sqrt{1+v/c} = \dots = 1/3$, as in eq. (2); that is, a clock whose reading increases

pligrandiĝis apenaŭ 20 minutojn.

Ĝisirante P , \mathcal{H}' tuj revenas direkte al \mathcal{H} , kun rapido $4c/5$ denove. Kaj *poste iom da tempo*, dum la alproksimiĝo, ĉiu horloĝo vidas, ke la monro de la alio pligrandiĝis pli rapide ol la sia, ĉe la relativeca rilato $\sqrt{1+v/c} \div \sqrt{1-v/c} = \dots = 3/1$, kiel en ek. (3); t.e., horloĝo kies monro pligrandiĝas 1 horon vidas, ke tiu de la alio pligrandiĝis 3 horojn.

Ĉio ŝajnas simetria, do la du horloĝoj ŝajne montrus la saman registron en la renkonto; sed ni sekvu la pli detalajn malkunajn analizojn de \mathcal{H}' kaj \mathcal{H} .

Jen la rezonado de la moviĝanta horloĝo \mathcal{H}' : mi ekforiras ĉe vojaĝo, kies forira daŭro estas sama kiel la revena, ambaŭ mezuritaj per mi. Dum la unua duono de mia vojaĝo mi vidos la montron de \mathcal{H} pligrandiĝi pli malrapide ol mian, ĉe la rilato $1/3$; kaj dum la dua duono mi vidos la montron de \mathcal{H} pligrandiĝi pli rapide ol mian, ĉe la rilato $3/1$. Do, meznombre, mi konstatos ke la takto de \mathcal{H} estis $(1/2)[(1/3) + (3/1)] = 5/3$ de mia.

La restanta horloĝo \mathcal{H} same konkludas per la jena analizo: \mathcal{H}' ekforiris ĉe vojaĝo de 5 foriraj jaroj kaj 5 revenaj jaroj, ĉiuj mezuritaj per mi; en nia renkonto mi certe montros $\Delta\tau = 10$ jarojn. Dum iom da tempo mi vidos la montron de \mathcal{H}' pligrandiĝi pli malrapide ol mian montron, ĉe la rilato $1/3$, poste mi vidos ĝin pligrandiĝi pli rapide ol mian, ĉe la inversa rilato $3/1$. Klare \mathcal{H}' atingos P kiam mi montros $\Delta\tau = 5$ jarojn. Ĉar P distancas 4 lumjarojn de ĉi tie, tial la informo pri la ekreveno de \mathcal{H}' atingos min nur en 4 jaroj poste. Do mi vidos la ŝanĝon de rilato $1/3$ al rilato $3/1$ nur kiam mi montros $\Delta\tau = 9$ jarojn, kaj dum apenaŭ la 1 jaro restanta mi vidos la montron de \mathcal{H}' pligrandiĝi pli rapide ol mian, ĉe la rilato $3/1$. Meznombre mi konstatos, ke la takto de \mathcal{H}' estas $(9/10)(1/3) + (1/10)(3/1) = 3/5$ de mia; do en la renkonto, ĉar mi montros $\Delta\tau = 10$ jarojn, tial \mathcal{H}' montros nur $\Delta\tau' = 6$ jarojn.

Ĉar tiu rilato $3/5$ per \mathcal{H} estas inversa de la rilato $5/3$ per \mathcal{H}' , tial la du horloĝoj same kon-

1 hour sees that the other has increased only 20 minutes.

Arriving at P , \mathcal{H}' immediately comes back towards \mathcal{H} , with speed $4c/5$ again. And *after a while*, in the reapproximation, each clock sees that the reading of the other has increased more rapidly than his reading, in the relativistic ratio $\sqrt{1+v/c} \div \sqrt{1-v/c} = \dots = 3/1$, as in eq. (3); that is, a clock whose reading increases 1 hour sees that the other increased 3 hours.

Everything seems symmetric, so the two clocks apparently should show the same reading at the re-encounter; but let us follow the more detailed reasonings of \mathcal{H}' and \mathcal{H} , separately.

Here is the reasoning of the moving clock \mathcal{H}' : I am departing to a trip, whose duration in the removal is equal to the duration in the reapproximation, both measured by me. In the first half of my trip I will see the reading of \mathcal{H} increase slower than mine, at the ratio $1/3$; and in the second half I will see the reading of \mathcal{H} increase faster than mine, at the ratio $3/1$. So, in the mean, I will find that the pace of \mathcal{H} was $(1/2)[(1/3) + (3/1)] = 5/3$ of mine.

The resting clock \mathcal{H} concludes the same, through the following analysis: \mathcal{H}' departed to a trip, 5 years going away and 5 years coming back, all measured by me; in our re-encounter I will certainly show $\Delta\tau = 10$ years. For some time I will see the reading of \mathcal{H}' increase more slowly than mine, at the ratio $1/3$, later I will see it increase faster than mine, at the inverse ratio $3/1$. Clearly \mathcal{H}' will arrive at P when I will show $\Delta\tau = 5$ years. Since P is 4 light-years far from here, the inform of the reverse motion of \mathcal{H}' will reach me only 4 years later. So I will see the change of ratio $1/3$ to ratio $3/1$ only when I will show $\Delta\tau = 9$ years, and only during the remaining 1 year I will see the reading of \mathcal{H}' increase faster than mine, at the ratio $3/1$. In the mean, I will find that the pace of \mathcal{H}' was $(9/10)(1/3) + (1/10)(3/1) = 3/5$ from mine; so in the re-encounter, since I will show $\Delta\tau = 10$ years, \mathcal{H}' will show $\Delta\tau' = 6$ years only.

Since the ratio $3/5$ found by \mathcal{H} is the inverse of the ratio $5/3$ found by \mathcal{H}' , the two clocks

kludas: \mathcal{H} , kiu ĉiam estis senmova en la sama inercia sistemo de referenco, montros “pli sekundojn” ol la vojaĝanta \mathcal{H}' , en la renkonto.

conclude the same: \mathcal{H} , who was always at rest in the same inertial reference system, will show “more seconds” than the travelling \mathcal{H}' , at the re-encounter.

5 Sinkroneco laŭ Einstein

La montro τ de horloĝo ofte ne gravas, por ordinaraĵ analizoj; vere, ni plej ofte bezonas scii apenaŭ intervalojn $\Delta\tau$. Nun supozu du horloĝojn, ambaŭ ripozantaj en la sama inercia sistemo de referenco [9, paĝo 1], do havante la saman takton. Sed dum iu montras τ , la alio povas montri $\tau^* \neq \tau$. Tiam ni diras ke ili estas nesinkronaj, kaj ni volas sinkronigi ilin.

Einstein sugestis la jenan recepton (difinon) por sinkronigi ripozantajn horloĝojn, \mathcal{H} kaj \mathcal{H}^* : en sia momento τ_1 , \mathcal{H} eligas lumsignalon en la direkto al \mathcal{H}^* ; kiam la signalo atingas \mathcal{H}^* , ĝi estas tuj reflektita revene al \mathcal{H} , kiu montras τ_2 kiam la signalo alvenas. Tiam la kvanto $\Delta\tau := (\tau_2 - \tau_1)/2$ estas kalkulita. En iu ajn posta momento τ de \mathcal{H} , nova signalo estas eligita de \mathcal{H} al \mathcal{H}^* , kun la instruo ke, kiam la signalo atingas \mathcal{H}^* , la montro de \mathcal{H}^* estu tuj ŝanĝata al $\tau + \Delta\tau$. Se la instruo estas obeita, la du horloĝoj \mathcal{H} kaj \mathcal{H}^* estas sinkronaj, kaj tiel ili restos.

5 Einstein synchronism

The reading τ of a clock often does not matter, in ordinary analyses; indeed, we most often need know only intervals $\Delta\tau$. Now suppose two clocks, both at rest in the same inertial reference system [9, page 1], so having the same pace. But while one shows τ , the other may show $\tau^* \neq \tau$. We then say they are out of synchronism, and we want to synchronize them.

Einstein suggested the following prescription (definition) to synchronize clocks at rest, \mathcal{H} and \mathcal{H}^* : in its moment τ_1 , \mathcal{H} emits a light signal towards \mathcal{H}^* ; when the signal reaches \mathcal{H}^* , it is immediately reflected back to \mathcal{H} , that shows τ_2 when the signal arrives. Then the quantity $\Delta\tau := (\tau_2 - \tau_1)/2$ is computed. At any later moment τ of \mathcal{H} , a new signal is emitted from \mathcal{H} towards \mathcal{H}^* , with the prescription that, when the signal reaches \mathcal{H}^* , the reading of \mathcal{H}^* be immediately changed to $\tau + \Delta\tau$. If the prescription is obeyed, the clocks \mathcal{H} and \mathcal{H}^* are synchronized, and so they will remain.

6 Rekta vico de horloĝoj

Sinkronaj horloĝoj restas laŭlonge rekta segmento. Por ilin vidi, mi lokiĝas tre malproksime de la segmento, en direkto normala al ĝi. Plue, mi ankaŭ havas ĉe mi horloĝon.

En iu momento, la horloĝa vico ekmoviĝas paralele al si, kaj tuj atingas konstantan rapidon v . Ĉiuj horloĝoj sam-momente ekiris, laŭ atestata per siaj montroj, kaj konfirmita per mi en mia loko. Mi ankaŭ vidas ke ĉiuj same akceliĝis ĝis atingi la konstantan rapidon v . Simile kiel en la okazo 3.1, mi vidas ke la takto de ĉiu moviĝanta horloĝo estas *malpli rapida* ol mia, ĉe la rilato $\sqrt{1 - v^2/c^2}$; kaj mi ankaŭ vidas, ke

6 Straight row of clocks

Synchronized clocks are disposed at rest along a straight segment. To see them, I stay very far from the segment and in direction normal to it. Further, I also have a clock with me.

In some moment, the row of clocks starts moving parallel to itself, and soon reaches constant speed v . All clocks departed at the same moment, according to their registers, and confirmed by me from my position. I also see that they all had same acceleration till reach the constant speed v . Similarly as in case 3.1, I see that the pace of every clock in motion is *slower* than mine, in the ratio $\sqrt{1 - v^2/c^2}$; and

ili daŭras sinkronaj.

Ankaŭ la moviĝantaj horloĝoj kun konstanta rapido v vidas, ke iliaj taktoj estas la sama; sed ili vidas, ke ilia takto estas *pli rapida* ol la mia, ĉe tiu rilato $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Tamen ili rimarkas, ke ili nun estas nesinkronaj. Ili rimarkas, ke la frontaj horloĝoj de la moviĝanta vico montras *pli* sekundojn ol la malfrontaj. Por distanco l , mezurita per ili, la malsinkrono estas lv/c^2 ([9, paĝo 11], aŭ vidu sekcion 9 de tiu ĉi artiklo).

Nun supozu, ke la horloĝoj resinkroniĝas dum la movado kun konstanta rapido. Poste la resinkroniĝo, mi ilin vidus nesinkronaj, tiuj frontaj montrante *malpli* sekundojn ol tiuj malfrontaj. Por distanco l , mezurita per la horloĝoj, la malsinkrono vidata per mi estus lv/c^2 .

En sekcioj 9 kaj 10 ni diskutos alian kielon por akceli horloĝojn: ili estos fiksitaj en rigida stango.

7 Cirklo de horloĝoj

Imagu vicon de sinkronaj horloĝoj, fiksitaj en cirklo kun radiuso R . La cirklo komence restas en inercia sistemo de referenco. Poste, ĝi ekrotacias ĉirkaŭ sia orta akso, ĝis atingi konstantan angulan rapidon ω . Ĉiuj horloĝoj sam-momente ekmoviĝis, laŭ atestata per siaj montroj, kaj ĉiuj angule akceliĝis same.

Mi estas fiksita en cirklocentro. Mi konfirmas ke mi vidis ĉiujn horloĝojn ekiri samtempe, kaj mi vidas ke iliaj taktoj fariĝis pli malrapide ol tiu de mia horloĝo (okazo 3.1), ĉe la rilato $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$. Do la periodo de la cirkla movado, kiel mezurata per la moviĝantaj horloĝoj, estas malpli granda ol tiu mezurata per mi, je tiu rilato. Mi rimarkas ankaŭ, ke ilia sinkrono ne malfariĝis, simile kiel en la okazo de rekta movado.

Ĉiu horloĝo en la rotacianta cirklo rimarkas, ke la alioj ankoraŭ havas takton same kiel sian, sed ĝi rimarkas, ke ĝi perdis la sinkronon kun ili.

I also see that they remain synchronous.

Also the clocks in motion with constant speed v see that their paces are equal; but they see that their pace is *faster* than mine, in that ratio $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. But they remark that they are now out of synchronism. They remark that the front clocks of the moving row show *more* seconds than those on the rear. For a separation l , measured by them, the dis-synchronism is lv/c^2 ([9, page 11], or see section 9 of this article).

Now suppose the clocks re-synchronize, in the motion with constant velocity. After re-synchronization, I would see them out of synchronism, the front clocks now showing *less* seconds than those of the rear. For a separation l , measured by the clocks, the dis-synchronism seen by me would be lv/c^2 .

In sections 9 and 10 we discuss another way of accelerating clocks: they will be fixed in a rigid rod.

7 Circle of clocks

Imagine a string of synchronized clocks, fixed on a circle with radius R . The circle is initially at rest in an inertial system of reference. Then it starts rotating around its normal axis, until reach constant angular speed ω . All clocks started moving in the same moment, according to their registers, and all angularly accelerated the same.

I am fixed at the centre of the circle. I confirm that I saw all clocks started moving simultaneously, and I see that their pace became slower than mine (case 3.1), in the ratio $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$. So the period of the circular motion, as measured by the clocks in motion, is less than that measured by me, in that ratio. I also remark that their synchronism was maintained, similarly as in the case of rectilinear motion.

Each clock of the rotating circle remarks that the others still have pace equal to his, but remarks that it lost the synchronism with them.

Ĝi rimarkas, ke la horloĝoj apenaŭ frontaj en la movado, montras pli sekundojn ol si, kontraŭe, tiuj ke estas apenaŭ malfrontaj montras malpli sekundojn. Ĝis nun nia raporto koincidas kun tiu de la rekta movado.

Ni vidu nun la malsamojn; ili okazas ĉar la horloĝoj estas fikitsaj en neinercia sistemo de referenco, do la relativeca simetrio estas rompita. Ĉiu horloĝo de la rotacianta cirklo vidas, ke sia takto estas pli *malrapida* ol la mia, haltadita en la cirklocentro. Plue ne estas ebla, ke la horloĝoj en cirkla movado *ĉiue* sinkroniĝas laŭ Einstein.

8 Periodo

Kiel ekzerco, ni nun rederivos la rilaton, inter la du malsimilaj periodoj por la cirkla movado, findita en antaŭa sekcio. Sed nun, mi kaj mia horloĝo \mathcal{H} estas haltaditaj en fiksita punkto apud la rotacianta cirklo. Do ni uzos la ekvacion (4) pri la ĝenerala Dopplera efiko, en kiu, kvankam la modulo $v = R\omega$ de la rapido de horloĝo \mathcal{H}' estas konstanta, la angulo α ne estas; vidu figuron 2.

Estiĝu $\varphi_0 = 0$ la angula pozicio de ambaŭ \mathcal{H} kaj \mathcal{H}' kiam $t = 0$. Do la angula loko de \mathcal{H}' en posta momento t estas $\varphi(t) = 2\alpha(t) = \omega t$, kaj la distanco inter la du horloĝoj estas $l(t) = 2R \sin \alpha(t) = 2R \sin(\omega t/2)$, kiel mezurita en inercia sistemo de referenco S_0 kie mi kaj \mathcal{H} restas. La ek. (4) estiĝas

$$d\tau' = \frac{\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}}{1 + (R\omega/c) \cos(\omega t/2)} dt_p. \quad (8)$$

Mi komence ($t \approx 0$) vidas foriĝan Doppleran efikon kiu iom-post-iome estiĝas transversa ($t = \pi/\omega$) kaj fine ($t \approx 2\pi/\omega$) alproksimiĝa. La rilato inter la periodoj estos donata per la integrado de la rilato (8) je unu plena turno. Por tio konsideru, ke en momento t de S_0 lumsignalo ekiras de \mathcal{H}' kaj atingas \mathcal{H} en la posta momento

$$t_p := t + \frac{l(t)}{c} = t + \frac{2R}{c} \sin(\omega t/2). \quad (9)$$

It remarks that the clocks just before him, in the motion, show more seconds than him, while those just behind show less seconds. Till this point our description coincides with that of the rectilinear motion.

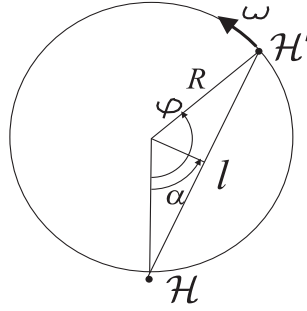
Now let us see the differences; these occur because the clocks are now fixed on a non-inertial reference system, so the relativistic symmetry is broken. Each clock on the rotating circle sees that his pace is *slower* than mine, staying at the centre of the circle. Besides, it is impossible that *all* the clocks in circular motion re-synchronize with the Einstein prescription.

8 Period

As an exercise, we now reobtain the relation, between the two different periods for the circular motion, found in the preceding section. But now, I and my clock \mathcal{H} are at rest in a fixed point close to the rotating circle. So we use the equation (4) of the general Doppler effect, where although the modulus $v = R\omega$ of the speed of clock \mathcal{H}' is constant, the angle α is not; see the figure 2.

Let $\varphi_0 = 0$ be the angular position of both \mathcal{H} and \mathcal{H}' when $t = 0$. So the angular position of \mathcal{H}' in a later moment t is $\varphi(t) = 2\alpha(t) = \omega t$, and the distance between the two clocks is $l(t) = 2R \sin \alpha(t) = 2R \sin(\omega t/2)$, as measured in an inertial sistem of reference S_0 where I and \mathcal{H} are at rest. The eq. (4) becomes

I initially ($t \approx 0$) see Doppler effect of removal, which progressively becomes transverse ($t = \pi/\omega$) and finally ($t \approx 2\pi/\omega$) of approximation. The relation between the periods is given by the integral of the relation (8) in a complete cycle. To that end, consider that at an instant t of S_0 a light signal starts from \mathcal{H}' , and reaches \mathcal{H} at the later moment



Figuro 2: La horloĝo \mathcal{H} ripozas, dume \mathcal{H}' unuforme cirkle moviĝas.

Figure 2: The clock \mathcal{H} is at rest, while \mathcal{H}' has a uniform circular motion.

Diferencialante ĉi tiun ekvacion ni ricevas

| Differentiating this equation we obtain

$$dt_p = [1 + (R\omega/c) \cos(\omega t/2)] dt, \quad (10)$$

kiu simpligas (8) al $d\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} dt$. Integrate tiu lasta ekvacio en unu turno, ni ricevas la rilaton inter la du periodoj: $\Delta\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} (2\pi/\omega)$. Indas noti, ke integrante (10) en unu turno, ni ricevas $\Delta t_p = 2\pi/\omega$; tio estis esperinda ĉar, post pleno de unu turno, la du horloĝoj estas denove kunaj kaj do $\Delta t_p = \Delta t$.

| which simplifies (8) to $d\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} dt$. Integrating this last equation in one turn, we obtain the relation between the two periods: $\Delta\tau' = \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} (2\pi/\omega)$. It is worth noting that, integrating (10) in one turn, gives $\Delta t_p = 2\pi/\omega$; this was expected, since after one turn the two clocks are again together and so $\Delta t_p = \Delta t$.

9 Rigida stango

En sekcio 6 ni movis etendeblan stangon same akcelante ĉiujn iliajn punktojn; tiu faris, ke la stanga propralongo pligrandiĝu. Ni nun vidos kiel akceli tiujn punktojn, tiel ke la propralongo ne ŝanĝu.

Estiĝu inercia sistemo de referenco S_0 , kun koordinatoj x kaj t , kaj *rigida* stango komence ripozanta laŭlonge de la akso x . Ankaŭ estiĝu punktoj a kaj b de la stango en la lokoj 0 kaj L , respektive. En momento $t = 0$, la stango ekmoviĝas laŭlonge de si, tiel ke a moviĝas laŭ $x(t)$. La stanga rigideco trudas ke b moviĝas tiel, ke la distanco L inter a kaj b restas konstanta per ĉiu inercia sistemo de referenco S_v kie a momente ripozas.

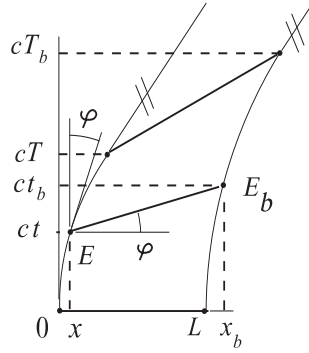
Sur la figuro 3 ni havas la eventojn $E = [x, ct]$, ĉe la historio de a , kaj $E_b = [x_b, ct_b]$, ĉe la historio de b ; estiĝu tiuj eventoj samtempaj en la inercia sistemo de referenco S_v . Tiukaze, la

9 Rigid rod

In section 6 we set in motion an extensible rod by equally accelerating all its points; that made increase the proper length of the rod. We now see how to accelerate these points, so that the proper length does not change.

Let be an inertial reference system S_0 , with coordinates x and t , and a *rigid* rod initially at rest along the x -axis. Also let points a and b of the rod at places 0 and L , respectively. In moment $t = 0$ the rod starts moving parallel to itself, with a moving according to $x(t)$. The rigidity of the rod makes b move in such a way that the separation L between a and b remains constant in every inertial reference system S_v in which a is momentarily at rest.

In figure 3 we have the events $E = [x, ct]$, in the history of a , and $E_b = [x_b, ct_b]$, in the history of b ; let these events be simultaneous in the inertial reference system S_v . In that case,



Figuro 3: Grafikaĵo de la historio de a , maldekstre, kaj b , dekstre. La punktoj a kaj b akceliĝas ĝis la momentoj T kaj T_b , respektive, poste iliaj rapidoj fariĝas konstantaj kaj samaj. La eventoj E kaj E_b estas samtempaj per la inercia sistemo de referenco S_v , kies aksoj faras angulon $\varphi(t)$ kun la aksoj de S_0 .

Figure 3: Graphic of the history of a , at left, and b , at right. The points a and b are accelerated until the moments T and T_b , respectively, then their speeds become constant and equal. The events E and E_b are simultaneous in the inertial reference system S_v , whose axes make angle $\varphi(t)$ with the axes of S_0 .

angulo φ rilatas al la rapido de a laŭ $\tan \varphi(t) = v(t)/c$, en kiu $v(t) := dx(t)/dt$. Ni volas rilatigi la valorojn de x_b kaj t_b al la valoroj de x kaj t . Unue ni vidas sur la figuro, ke $\tan \varphi(t) = c(t_b - t)/(x_b - x)$, do

the angle φ is related to the speed of a according to $\tan \varphi(t) = v(t)/c$, in which $v(t) := dx(t)/dt$. We want to relate the values of x_b and t_b to the values of x and t . First, we see on the figure that $\tan \varphi(t) = c(t_b - t)/(x_b - x)$, so

$$c(t_b - t) = \frac{v(t)}{c}(x_b - x); \quad (11)$$

poste ni trudas la Lorentzan konstantecon de la interspaco L , t.e.,

then we impose the Lorentzian constancy of the separation L , i.e.,

$$(x_b - x)^2 - c^2(t_b - t)^2 = L^2; \quad (12)$$

fine ni ricevas de (11) kaj (12) (Nikolić [12])

finally we obtain from (11) and (12) (Nikolić [12])

$$x_b = x + L\gamma, \quad t_b = t + \frac{L}{c^2}v\gamma, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13)$$

Memoru, ke x estas pozicio de punkto a en momento t , dum ke x_b estas pozicio de b en posta momento t_b per (13b).

Remember that x is the position of point a at moment t , while x_b is the position of b at later moment t_b through (13b).

Ni montras, ke en ĉiuj sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco S_v , ĉiuj stangaj punktoj estas same rapidaj. Ĉar punkto b ne estas speciala, tiam sufiĉas montri, ke ĝia rapido dx_b/dt_b en momento t_b estas $v(t)$. Por tio, ni unue diferencialas (13a) kaj (13b) kaj ricevas

We show that, in all successive inertial reference systems S_v , all points of the rod have same speed. Since the point b has nothing special, it suffices to show that its speed dx_b/dt_b in moment t_b is $v(t)$. To that end, we first differentiate (13a) and (13b) and obtain

$$dx_b = dx + (L/c^2)\gamma^3 v dv, \quad (14)$$

$$dt_b = dt + (L/c^2)\gamma^3 dv, \quad (15)$$

en kiuj ni uzis

in which we used

$$d\gamma \equiv (\gamma^3 v/c^2) dv, \quad d(v\gamma) \equiv \gamma^3 dv. \quad (16)$$

Poste ni uzas (14) kaj (15) en $v_b(t_b) = dx_b/dt_b$, kaj ricevas efektive $v_b(t_b) = v(t)$ (kaj konsekvence $\gamma_b(t_b) = \gamma(t)$). Konvenas ripeti ke ĉi tiu samo de rapidoj de a kaj b okazas per la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco S_v , kaj ne per la inercia sistemo de referenco S_0 .

Supozu, ke la punktoj a kaj b estas sinkronaj horloĝoj en komenca momento $t = 0$, kiam ili estis restantaj kaj montris $\tau = 0$ kaj $\tau_b = 0$. Nun ni montras, ke per la sinsekvaj inerciaj sistemoj de referenco S_v , ili ne restas sinkronaj, kaj ni kalkulas la mal-sinkronon. Por tio, ni kalkulas la propratempojn τ kaj τ_b montratajn per tiuj horloĝoj ekde la ripozo. Integrate $d\tau = dt/\gamma(t)$ de 0 ĝis t , kaj $d\tau_b = dt_b/\gamma_b(t_b)$ de 0 ĝis t_b , ni ricevas

Then we use (14) and (15) in $v_b(t_b) = dx_b/dt_b$, and obtain effectively $v_b(t_b) = v(t)$ (and consequently $\gamma_b(t_b) = \gamma(t)$). It is worth repeating that this equality of speeds of a and b occurs in the successive inertial reference systems S_v , and not in the inertial reference system S_0 .

Suppose that the points a and b are synchronous clocks in the initial moment $t = 0$, when they were at rest and showed $\tau = 0$ and $\tau_b = 0$. We now show that, in the successive inertial reference systems S_v , they do not remain synchronous, and calculate the dis-synchronism. To that end, we calculate the propertimes τ and τ_b shown by these clocks since the state of rest. Integrating $d\tau = dt/\gamma(t)$ from 0 to t , and $d\tau_b = dt_b/\gamma_b(t_b)$ from 0 to t_b , we obtain

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_b(t_b) &= \int_0^{t_b} \frac{dt_b}{\gamma_b(t_b)} = \int_0^t \frac{dt}{\gamma(t)} + \frac{L}{c^2} \int_0^v \gamma^2 dv = \tau(t) + \frac{L}{c^2} \int_0^v \frac{dv}{1 - v^2/c^2} \\ &= \tau(t) + \frac{L}{c} \tanh^{-1} \frac{v(t)}{c}; \end{aligned} \quad (18)$$

en la supra kalkulo ni uzis (15) por ŝanĝo de integra variablo, kaj rilataj limoj, de t_b al t kaj v . Ni vidas do, ke en ĉiu ripoza inercia sistemo de referenco S_v de la rigida stango, la horloĝoj montras malsinkronon

in this calculation we used (15) to change the variable of integration, and related limits, from t_b to t and v . We then see that, in every inertial reference system S_v where the rigid rod is at rest, the clocks show a dis-synchronism

$$\tau_b(t_b) - \tau(t) = \frac{L}{c} \tanh^{-1} \frac{v(t)}{c}, \quad (19)$$

en kiu L estas la propra interspaco inter la horloĝoj. La malsinkrono (19) estas fore vidata, per observanto en vida rekto normala al la stango, kaj kun rapido v en la inercia sistemo de referenco S_0 . La rezulto (19) ĝeneralas tion

where L is the proper separation between the clocks. The dis-synchronism (19) is seen, by an observer far away in a line of sight normal to the rod, and with speed v in the inertial reference system S_0 . The result (19) generalizes that of

de Giannoni kaj Grøn [13], kiuj havigis ĝin en la speciala okazo pri konstanta propra akcelo de a , laŭ ni vidos en la sekvanta sekcio.

Ni povas ankaŭ montri, ke ĉiuj horloĝoj fiksitaj en la rigida stango havas saman takton, per ĉiu inercia sistemo de referenco S_v . Por tio, ni kalkulas $d\tau = dt/\gamma$ pri la horloĝo a en momento t , kaj pri la horloĝo b en momento t_b (rememoru ke la eventoj priskribitaj kiel $[x, ct]$ kaj $[x_b, ct_b]$ en S_0 estas samtempaj en S_v):

$$d\tau(t) = \frac{dt}{\gamma(t)}, \quad d\tau_b(t_b) = \frac{dt}{\gamma_b(t_b)}; \quad (20)$$

ĉar $\gamma_b(t_b) = \gamma(t)$, tial ni notas ke efektive $d\tau_b(t_b) = d\tau(t)$. Konvenas emfazi ke tiu takta sameco en samaj momentoj estas vidata apenaŭ per observanto en la sinsekvaj sistemoj de referenco S_v , kaj ne en la komenca sistemo de referenco S_0 . Ja, en la inercia sistemo de referenco S_0 , la horloĝo b pulsas en la momento t_b same kiel la horloĝo a pulsas en la iam antaŭa momento t .

Ŝajnas paradoksa ke ĉiuj horloĝoj fiksitaj en la moviĝanta rigida stango havas *saman takton* per ĉiu sistemo de referenco S_v , kaj tamen iom-post-iome malsinkroniĝas per la sinsekvaj S_v . La paradokso estas solvata se ni memoras ke kvankam ĉiu S_v estas inercia, sistemo de referenco kiu akompanas la akcelan movadon de la rigida stango ne estas inercia. Notu ke la samtempa rekto $E - E_b$, sur figuro 3, ŝanĝas la klinon iom-post-iome.

Nun ni supozu, ke en momento T la horloĝo a maldaŭrigas sian akcelon, kaj tenas konstanta la rapidon $V := v(T)$. Iom-post-iome la horloĝoj antaŭaj a ankaŭ havigos la konstantan rapidon V ĝis kiam la horloĝo b ankaŭ havos rapidon V , en la momento T_b . Do, en la momento T_b , ĉiu peco de rigida stango inter a kaj b havos la konstantan rapidon V mezurata per la inercia sistemo de referenco S_0 . Ni povas nun kalkuli la malsinkronon $\tau_b(T_b) - \tau(T)$ inter la horloĝoj a kaj b , en la momento T_b de S_0 : ni unue kalkulas

Giannoni and Grøn [13], who obtained it in the special case of constant proper acceleration of a , as we shall see in the next section.

We can also show that all clocks fixed on the rigid rod have same pace, in every inertial reference system S_v . To that end, we calculate $d\tau = dt/\gamma$ for the clock a at the moment t , and for the clock b at the moment t_b (remember that the events described as $[x, ct]$ and $[x_b, ct_b]$ in S_0 are simultaneous in S_v):

since $\gamma_b(t_b) = \gamma$, we remark that effectively $d\tau_b(t_b) = d\tau(t)$. It is worth to emphasize that such equality of pace at same moments is seen only by an observer in the successive reference systems S_v , and not in the initial reference system S_0 . Really, in the inertial reference system S_0 the clock b beats in the moment t_b as the clock a beated in the preceding moment t .

It seems paradoxical that all clocks fixed on the moving rigid rod have *same pace* in every reference system S_v , and nevertheless progressively dis-synchronize in the successive S_v . The paradox is solved if we remember that while every S_v is inertial, a reference system who accompanies the accelerated motion of the rigid rod is not inertial. Remark that the line of simultaneity $E - E_b$, in figure 3, changes slope progressively.

Let us now suppose that at moment T the clock a ceases its acceleration, and maintains constant the speed $V := v(T)$. Progressively the clocks ahead a in the motion will also have the constant speed V until when the clock b also have speed V , at moment T_b . So, in moment T_b , every piece of the rigid rod between a and b will have the constant speed V , as measured in the inertial reference system S_0 . We can now calculate the dis-synchronism $\tau_b(T_b) - \tau(T)$ between the clocks a and b , in the moment T_b of S_0 : we first calculate

$$\tau(T_b) = \int_0^{T_b} \frac{dt}{\gamma} = \left(\int_0^T + \int_T^{T_b} \right) \frac{dt}{\gamma} = \tau(T) + \frac{T_b - T}{\gamma(T)} = \tau(T) + \frac{LV}{c^2}, \quad (21)$$

en kiu, per (13b), ni uzis $(T_b - T)/\gamma(T) = LV/c^2$. Konsidere (19) kun $t_b = T_b$ kaj $t = T$, kaj (21), ni fine ricevas

$$\tau_b(T_b) - \tau(T_b) = \frac{L}{c} \tanh^{-1}(V/c) - \frac{LV}{c^2}. \quad (22)$$

Ĉi tiu estas la malsinkrono per la inercia sistemo de referenco S_0 komence ripoza de la stango. Do observanto sufiĉe malproksime de la stango, en direkto normala al ĝi (kiel en sekcio 6), vidas malsinkronon laŭ (22). Ĝi pendas nur de la valoro V , kaj ne de la maniero kiel tiu rapido estas ricevita. Notu ke se la horloĝo a daŭriĝas kun konstanta rapido post T_b , tiu malsinkrono daŭriĝas. Ĉar $\tanh^{-1}(V/c) = V/c + (V/c)^3/3 + \dots$, tial ni vidas ke la malsinkrono (22) inter la horloĝoj estas ĉe ordo $LV^3/3c^4$, tre malgranda kaj malsigna ol la familiara $-LV/c^2$ trovata inter koordinataj horloĝoj ĉe la Lorentzaj transformoj (lasta termo en (22)).

Indas noti, ke ni povas eviti la malsaman maljuniĝon de la stang-punktoj, se ni ne trudas rigidecon dum la akcelo, t.e., se ni fiksas nur la kondiĉojn komencajn (ripozon) kaj finajn (rapidon V). Ja, se iu stang-punkto zigzagas kun rapido proksima al c , ĝia propratempaj intervaloj estos tiel malgranda kiel ni volas.

10 Konstanta propra akcelo

En la antaŭa sekcio ni studis la movadon de stango kiu restis rigida kun arbitra akcelo. Ni nun specialigas, elektante $x(t)$ tiel ke la horloĝo a havu konstantan propran akcelon [9, paĝo 22], [14, paĝo 73], [6, paĝo 49], [13] kaj [12]. Kiel antaŭe, la rigida stango moviĝas paralele al si, laŭlonge akso x .

La propra akcelo A de partiklo estas difinata kiel $A := d^2x_v/dt_v^2$, per ĉiu inercia sistemo de referenco S_v momente ripozanta de la partiklo. Pro tiu akcelo la partiklo havas diferenca-lan mov-ekvacion $du/dt = A$ en kiu $u := v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, estante $v := dx/dt$ la partikla

where, through (13b), we used $(T_b - T)/\gamma(T) = LV/c^2$. Considering (19) with $t_b = T_b$ and $t = T$, and (21), we finally obtain

This is the dis-synchronism in the inertial reference system S_0 of the initial rest of the rod. So an observer sufficiently far from the rod, in a direction normal to it (as in section 6), sees a dis-synchronism as in (22). It depends only on the value V , and not on the way that such speed was obtained. Remark that if the clock a maintains the constant speed after T_b , that dis-synchronism remains. Since $\tanh^{-1}(V/c) = V/c + (V/c)^3/3 + \dots$, we see that the dis-synchronism (22) between the clocks is of order $LV^3/3c^4$, very small and of opposite sign of the familiar $-LV/c^2$ found between coordinate clocks in the Lorentzian transformations (the last term in (22)).

It is worth noting that we can avoid the unequal aging of the points of the rod, if we do not impose rigidity during the acceleration, i.e., if we fix only the initial conditions (rest) and final (speed V). Indeed, if every point of the rod zigzags with speed near to c , its intervals of proptime will be as short as we want.

10 Constant proper acceleration

In the preceding section we studied the motion of a rod which remained rigid under an arbitrary acceleration. We now specialize, choosing $x(t)$ such that the clock a have constant proper acceleration [9, page 22], [14, page 73], [6, page 49], [13] and [12]. As before, the rigid rod moves parallel to itself, along the x -axis.

The proper acceleration A of a particle is defined as $A := d^2x_v/dt_v^2$, for every inertial reference system S_v in which the particle is momentarily at rest. Under this acceleration the particle has differential equation of motion $du/dt = A$ where $u := v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, being

rapido mezurata per la inercia sistemo de referenco S_0 , kies koordinatoj estas x kaj t . La ĝenerala solvo por $A = \text{konst}$ estas $v := dx/dt$ the particle speed measured in the inertial reference system S_0 , whose coordinates are x and t . The general solution for $A = \text{konst}$ is

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2}{A} \left(\sqrt{1 + [A(t - t_0) + u_0]^2/c^2} - \gamma_0 \right), \quad (23)$$

$$\gamma_0 := \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad u_0 := v_0 \gamma_0, \quad (24)$$

en kiuj t_0 markas la akcelan komencon, $x_0 := x(t_0)$ estas la komenca loko, kaj $v_0 := v(t_0)$ estas la komenca rapido. La rapido estas where t_0 marks the beginning of the acceleration, $x_0 := x(t_0)$ is the initial position, and $v_0 := v(t_0)$ is the initial speed. The speed is

$$v(t) = \frac{A(t - t_0) + u_0}{\sqrt{1 + [A(t - t_0) + u_0]^2/c^2}}, \quad (25)$$

kaj la propratempo inter la akcela komenco en t_0 kaj la momento t estas ricevata per la integro de $d\tau = dt/\gamma(t) = dt\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$, and the proptime between the beginning of the acceleration at t_0 and the moment t is obtained through the integration of $d\tau = dt/\gamma(t) = dt\sqrt{1 - v(t)^2/c^2}$,

$$\tau(t) = \frac{c}{A} \sinh^{-1} \left(\frac{A(t - t_0) + u_0}{c} \right) - \frac{c}{A} \sinh^{-1} \left(\frac{u_0}{c} \right). \quad (26)$$

La horloĝo a de la antaŭa sekcio havas $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, kaj $t_0 = 0$. La ekvacioj (23) – (26) por tiu a simpliĝas al The clock a of the preceding section has $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, and $t_0 = 0$. The equations (23) – (26) for that a simplify to

$$x = \frac{c^2}{A} \left(\sqrt{1 + A^2 t^2/c^2} - 1 \right) = \frac{2c^2}{A} \sinh^2 \left(\frac{A\tau}{2c} \right), \quad (27)$$

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 + A^2 t^2/c^2}} = c \tanh \left(\frac{A\tau}{c} \right), \quad (28)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + A^2 t^2/c^2} = \cosh \left(\frac{A\tau}{c} \right), \quad u = At = c \sinh \left(\frac{A\tau}{c} \right), \quad (29)$$

$$\tau = \frac{c}{A} \sinh^{-1} \left(\frac{At}{c} \right). \quad (30)$$

Ni determinas nun la movadon de la horloĝo b , ankaŭ fiksita en la stango, en la komenca loko $x = L$. Uzante la antaŭajn ekvaciojn en la rigidecaj kondiĉoj (13) ni ricevas We now determine the motion of the clock b , also fixed on the rod, at the initial position $x = L$. Using the preceding equations under the rigidity conditions (13) we obtain

$$x_b = L + \frac{c^2}{B} \left(\sqrt{1 + B^2 t_b^2/c^2} - 1 \right) = L + \frac{2c^2}{B} \sinh^2 \left(\frac{B\tau_b}{2c} \right), \quad (31)$$

$$t_b = \frac{A}{B} t, \quad B := \frac{A}{1 + AL/c^2}. \quad (32)$$

Komparante (31) kun (27) ni vidas ke la horloĝo b ekiras de la loko L kiam $t_b = 0$ kaj havas propran akcelon B ankaŭ konstanta. Ni rimarkas ke, se la horloĝo b estus en la komenca loko $-c^2/A$, tial ĝia propra akcelo estus nefinia kaj ĝia rapido estus c ; tio signifas, ke ni ne povas senfine poste plivastigi la stangon. Kaj (32), skribata kiel $Bt_b = At$, permesas tre klaran Newtonan interpreton: se la horloĝo b ricevas konstantan akcelon B dum la intertempo t_b , ĝi havos saman rapidon kiel la horloĝo a , se ĉi tiu ricevas konstantan akcelon A dum la intertempo t .

Evidente, ĉiu rezulto havigata en sekcio 9 estas ankaŭ valida en ĉi tiu speciala okazo. Sed ni nun havas unu novan rezulton. En iu ajn momento dum la rigida stango akceliĝas, la registroj de la horloĝoj a kaj b vidataj per S_0 estas donataj per (30), kun B anstataŭ A por la kalkulo de τ_b .

11 Konkludoj

Ni vidis ke la relativeca tempo estas malsama ol la Newtona: la fluo de la relativeca (propratempe) dependas de la rapido de la korpo (horloĝo) kiu mezuras ĝin, kontraŭe la Newtona ne dependas. Laŭ la relativeco, ju pli granda la horloĝa rapido, des malpli rapida la antaŭeniro de ĝia registro.

Do, ni vidis en subsekcio 3.4 ke, kontraŭe la Newtona antaŭvido, Dopplera efiko de alruĝo estas ebla eĉ se la interspaco fonto-observanto plietigās. Ni ankaŭ vidis, en sekcio 4, ke la detala analizo de Darwin montris ke la ĝeneralrelativeco ne estas necesa por solvi la ĝemelparadokson. Estis same grava noti, en sekcio 7, ke horloĝoj fiksitaĵ en la bordo de rotacia disko ne povas esti ĉiue sinkronaj laŭ Einstein.

En sekcio 9, ni vidis ke ne estas triviala, la konstruo de moviĝanta inercia sistemo de referenco ekde iu alia S senmova. Fakte, se ni same akcelas ĉiujn punktojn de S (kiel en sekcio 6), ni perdas ĝian rigidecon, kaj ne havigas la spacan malplivastigon nek la malsinkronon ordinaraĵn de la special-relativeco. Aliaflanke,

Comparing (31) with (27) we see that the clock b starts from the position L when $t_b = 0$ and has proper acceleration B also constant. We remark that, if the clock b were at the initial position $-c^2/A$, its proper acceleration would be infinite and its speed would be c ; this means that we can not enlarge the rod indefinitely backwards. And (32), written as $Bt_b = At$, permits a very clear Newtonian interpretation: if the clock b receives constant acceleration B during the time interval t_b , it will get the same speed as the clock a , if this receives constant acceleration A during the time interval t .

Evidently, every result obtained in section 9 is also valid in this special case. But we now have one new result. At any moment when the rigid rod is accelerating, the readings of the clocks a and b seen in S_0 are given by (30), with B in place of A for the calculation of τ_b .

11 Conclusions

We saw that the relativistic time is different from the Newtonian: the flow of the relativistic (proptime) depends on the speed of the body (a clock) that measures it, while the Newtonian does not depend. According to relativity, the larger the speed of the clock, the less fast the increasing of its register.

So, we saw in subsection 3.4 that, oppositely to the Newtonian prediction, a Doppler effect of redshift is possible even if the distance source-observer is decreasing. We also saw, in section 4, that the detailed analysis of Darwin showed that the general relativity is not necessary to solve the twin paradox. It was also important to remark, in section 7, that clocks fixed on the rim of a rotating disk can not be all Einstein synchronous.

In section 9, we saw that it is not trivial, the construction of a moving inertial reference system starting from some other S at rest. In fact, if we accelerate equally all points of S (as in section 6), we loose its rigidity, and do not obtain the ordinary spatial contraction and desynchronization of special relativity. On the other

se ni akcelas S trudante rigidecon, ni havigas la Lorentzan malplivastiĝon, sed ankoraŭ ne ekhavis la volatan malsinkronon. Por fine havigi inercia sistemo de referenco, resinkronigo de moviĝantaj horloĝoj estas bezona.

Fine, en sekcio 10 ni vidis ke se iu punkto de la rigida stango havas konstantan propran akcelon, do ĉiuj aliaj punktoj ankaŭ havos ĝin, sed kun malsamaj valoroj; tiuj ie antaŭaj en la movado estas la malpli akcelataj, kaj la stango ne povas tro ie poste plivastiĝi.

En inercia sistemo de referenco de la special-relativeco, la valoro de la tempa koordinato estas trudata per horloĝoj sinkronaj laŭ Einstein. Tamen, ni povas uzi ankaŭ neinerciajn sistemojn de referenco, en kiuj la tempa koordinato estas trudata per mezuriloj kies taktoj estas malsamaj ol tiu de la normohorloĝoj de la special-relativeco. Tio estas temo por nia estonta artikolo, *La relativeca tempo - II* [15].

side, if we accelerate S imposing rigidity, we obtain the Lorentzian contraction, but still do not obtain the desired dis-synchronism. To finally obtain an inertial reference system, a re-synchronization of the moving clocks is necessary.

Finally, in section 10 we saw that if one point of the rigid rod has constant proper acceleration, then all other points also have it, but with different values; those that are ahead in the motion are less accelerated, and the rod can not extend backwards too much.

In an inertial reference system of the special relativity, the value of the time coordinate is imposed by clocks Einstein synchronized. However, we can use also non-inertial reference systems, in which the time coordinate is imposed by measuring apparatuses whose paces are different from that of the standard clocks of special relativity. This is the theme of our future article, *The relativistic time - II* [15].

Citaĵoj

- [1] Bureau International des Poids et Mesures, Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre, *Le système international d'unités (SI) 7^e édition 1998*, Édité par le BIPM, France (<http://www.bipm.fr/utls/en/pdf/brochure-si.pdf> ; <http://www.bipm.fr/en/home>).
- [2] H.J. Hay, J.P. Schiffer, T.E. Cranshaw, P.A. Egelstaff, *Measurement of the red shift in an accelerated system using the Mössbauer effect in Fe^{57}* , Phys. Rev. Letters **4** (1960) 165-166.
- [3] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman (1973).
- [4] R.B. Salgado, *Visualizing proper-time in special relativity*, <http://www.arxiv.org/abs/physics/0505134> .
- [5] J.L. Synge, *Relativity: the general theory*, North-Holland (1960).
- [6] W. Rindler, *Essential relativity, 2nd ed.*, Springer-Verlag (1977).
- [7] R.M. Eisberg, *Fundamentals of modern physics*, John Wiley & Sons (1961).
- [8] J. Bailey *et al.*, *Measurements of relativistic time dilation for positive and negative muons in a circular orbit*, Nature **268** (1977) 301-305.
- [9] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields, 4th revised English edition*, Butterworth-Heinemann (1996).

References

- [10] H. Bondi, *Some special solutions of the Einstein equations*, in *Lectures on general relativity, vol. 1*, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, eds. S. Deser and K.W. Ford; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1965).
- [11] C. Darwin, *The clock paradox in relativity*, *Nature* **180** (1957) 976-977.
- [12] H. Nikolić, *Relativistic contraction of an accelerated rod*, *Am. J. Phys.* **67** (1999) 1007-1012, <http://www.arxiv.org/abs/physics/9810017> .
- [13] C. Giannoni, Ø. Grøn, *Rigidly connected accelerated clocks*, *Am. J. Phys.* **47** (1979) 431-435.
- [14] C. Møller, *The theory of relativity, 2nd ed.*, Oxford U.P. (1972).
- [15] F.M. Paiva, A.F.F. Teixeira, *The relativistic time – II*, <http://www.arxiv.org/abs/1107.1399> .