

Dopplera efiko de luma ebena vidata per akcelata observanto

F.M. Paiva

Departamento de Física, U.E. Humaitá II, Colégio Pedro II
Rua Humaitá 80, 22261-040 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; fmpaiva@cbpf.br

A.F.F. Teixeira

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
22290-180 Rio de Janeiro-RJ, Brasil; teixeira@cbpf.br

15-a de oktobro, 2008

Resumo

Ebena eklumiĝas unukolore kaj tuj poste mallumiĝas, dum observanto ekmoviĝas orte el ebena kun konstanta propra akcelo. Special-relativeco antaŭdiras, ke observanto vidas luman cirklon ĉiam en direkto mala al la ebena, sen Dopplera efiko, kaj ke tiu cirklo ŝajnos progresse etiĝi ĝis punkto.

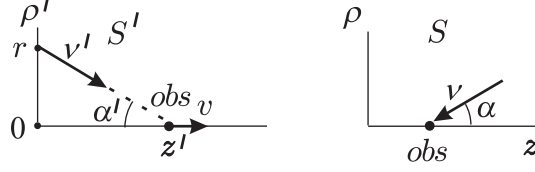
1 Enkonduko

Supozu observanton senmova en ebena. Subite la tuta ebena eligas unukoloran lumon en ĉiuj direktoj, dum tre mallonga intertempo. Sammomente la observanto ekmoviĝas orte el la ebena, kun konstanta propra akcelo. Ni priskribas tion, kion la observanto vidas el tiu ekbrilo, laŭ special-relativeco.

Movadon de objekto kun konstanta propra akcelo studis pluraj aŭtoroj: Møller [1, paĝo 72], Rindler [2, paĝo 49], Dwayne Hamilton [3], Landau kaj Lifshitz [4, paĝo 22], Cochran [5], kaj ni mem [6, 7, 8, 9, 10]. Propra akcelo de objekto estas la akcelo mezurata per inercia referenca sistemo kie la objekto momente restas. Tiu akcelo \vec{a} malegalas Newtonan akcelon $\vec{a}_N := d^2\vec{x}/dt^2$ kaj pli taŭgas al special-relativeco. Fakte, la rapido v de objekto kun konstanta Newtona akcelo a_N povas matematike superi la liman valoron de vakuo-lumo-rapido c , post sufiĉe da tempo. Kontraŭe, rapido de objekto kun konstanta propra akcelo a neniam estos c .

Por priskribi la fenomenon, difinu $S' := [ct'; z', \rho', \varphi']$ kiel space cilindra sistemo de koordinatoj kie lumfonto estas senmova kaj okupas la tutan ebenon $z' = 0$. Vidu figuron 1. La observanto komence estas senmova en loko $z' = \rho' = 0$, kaj ekde momento $t' = 0$ ĝi moviĝas kun konstanta propra akcelo a en la pozitiva direkto de akso z' . Ĝia movado do estas [1, paĝo 74], [9]

$$z' = \frac{c^2}{a} [\cosh(a\tau/c) - 1], \quad \rho' = 0, \quad \sinh(a\tau/c) = at'/c, \quad (1)$$



Figuro 1: En sistemo S' , lumoj eligita kun frekvenco ν' incidas sur observanto kun rapido v . En sistemo S de momenta senmovo de observanto, tiu lumoj estas perceptata kun frekvenco ν . Ĉe la kinematikaj kondiĉoj supozataj en la teksto, special-relativeco antaŭvidas egalaĵojn $\nu = \nu'$ kaj $\alpha = \alpha'$.

estante τ la propra intertempo de observanto ekde $t' = 0$. Rimarku en lasta (1), ke τ egiĝas malpli rapide ol tempa koordinato t' de horloĝaro de S' . Rapido $v := dz'/dt'$ de observanto en S' kaj rilata faktoro γ de tempa dilato pliiĝas kiel

$$v = c \tanh(a\tau/c), \quad \gamma = \cosh(a\tau/c). \quad (2)$$

Kelkaj interesaj rimarkoj pri akceloj indas menciion ĉi tie. Unue, la konstanta propra akcelo a en ĉi tiu artikolo rilatas al malkonstanta Newtona akcelo $a_N(t')$ per $a = \gamma^3 a_N$, estante $\gamma(t') := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kaj estante $v(t')$ la rapido de objekto. Ĉar $\gamma(t') \geq 1$, tial $a_N(t') \leq a$ ĉi tie.

Due, ekvacioj (2) kaj (1) kaŭzas $v \approx a_N t'$ kiam $\tau \approx 0$, kvazaŭ la Newtona kinematiko. Trie, la rapido v apenaŭ proksimiĝas al c , kiam $\tau \rightarrow \infty$. Tion oni komprenas: $\gamma(t')$ multe plivaloras kiam $v(t') \rightarrow c$, tial ĝi multe malfortigas la malkonstantan Newtonan akcelon $a_N = a/\gamma^3$.

2 Percepto de lumoj

Por studi percepton de ekbrilo de ebena estiĝo, en sistemo S' , lumoj eligita el cirklo $[z', \rho', \varphi'] = [0, r, \forall]$ en momento $t' = 0$, kun onda 4-vektoro (vidu figuron 1)

$$k^{\mu'} := \nu' [1; \cos \alpha', -\sin \alpha', 0]. \quad (3)$$

Tiu lumoj incidas sur la observanto en (t', z') se $ct' = \sqrt{z'^2 + r^2}$. Uzante $z'(\tau)$ kaj $t'(\tau)$ el (1), kaj uzante $\cos \alpha' = z'/(ct')$ el figuro 1, rezultiĝas

$$r = \frac{2c^2}{a} \sinh(a\tau/2c), \quad \cos \alpha' = \tanh(a\tau/2c). \quad (4)$$

La unua esprimo indikas tiun cirklon de la ebena, kiun vidas la observanto en propratempo τ . Ĉar $dr/d\tau \approx c$ kiam $\tau \approx 0$, tial la radiuso r de luma cirklo komence egiĝas kun rapido c . Poste r egiĝas ankoraŭ pli rapide. Pro la dua esprimo, la angulo α' en figuro 1 etiĝas ekde $\pi/2$ ĝis 0 , dum la propratempo τ kaj la loko z' de observanto egiĝas ambaŭ de 0 ĝis ∞ .

Por priskribi luman percepton, la observanto kun rapido v uzas inercian sistemon kie ĝi momente estas senmova, en momento de percepto. Do ni elektas sistemon S kun rapido v rilate al S' , kaj havante akson z sur akso z' , kiel en figuro 1.

En sistemo S , komponantoj de onda 4-vektoro de lumoj eligita el r estas kalkulitaj el komponantoj (3) per Lorentzaj transformoj, kiel

$$\nu = \gamma \nu' [1 - (v/c) \cos \alpha'], \quad k^z = \gamma \nu' (\cos \alpha' - v/c), \quad k^\rho = -\nu' \sin \alpha', \quad k^\varphi = 0. \quad (5)$$

Ĉar la observanto foriras de fonto, oni naive povus esperi, ke frekvenco ν de perceptata lumo estus plieta ol frekvenco ν' de eligita lumo. Tamen tio ne veriĝas, kiel ni konstatas uzante la unuan el (3), kaj poste (2) kaj (4):

$$\frac{\nu}{\nu'} = \gamma \left[1 - \frac{v}{c} \cos \alpha' \right] = \cosh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \left[1 - \tanh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \tanh \left(\frac{a\tau}{2c} \right) \right] \equiv 1. \quad (6)$$

Do la Dopplera faktoro $D := \nu/\nu'$ estas 1, t.e., ne estas Dopplera efiko. Tiu fakto ne estus esperata, precipe ĉar ĝi okazas en ĉiu momento τ , kaj por iu ajn valoro de konstanta propra akcelo a .

Alia malesperata fakto estas, ke malkonstantaj komponantoj k^z kaj $k^{z'}$ ĉiam havas kontraŭajn signumojn, kaj saman modulon. Tion oni konstatas uzante k^z el (5) kaj $k^{z'}$ el (3), poste (2) kaj (4):

$$\frac{k^z}{k^{z'}} = \frac{\gamma[\cos \alpha' - v/c]}{\cos \alpha'} = \frac{\cosh(a\tau/c)[\tanh(a\tau/2c) - \tanh(a\tau/c)]}{\tanh(a\tau/2c)} \equiv -1. \quad (7)$$

Ĉar ankaŭ okazas $k^p = k^{p'}$, tial la observanto en S vidas la fonton antaŭen, kun angulo α sama al la angulo α' ĉe S' , kiel montras figuro 1. El (4), α' etiĝas dum la movado, tial ankaŭ α etiĝas dum la movado, kaj do la observanto vidas la luman cirklon progrese nuliĝi.

Ripetinde, la observanto vidas la lumon nur se li estas dorse al eliganta ebena. Nomiĝas aberacio, iu ajn ŝanĝo de ŝajna direkto de objekto pro movado de observanto. Aberacion de objekto ni nomu *forta*, se la objekto estas malantaŭ la moviĝanta observanto en sistemo S' sed estas vidata antaŭen per observanto en sistemo S . El (7), *forta* aberacio okazas se $v > c \cos \alpha'$, t.e., se la rapido de observanto estas pligranda ol la projekcio de rapido de lumo sur vojo de observanto (vidu figuron 1).

Speciale, fortan aberacion de objekto oni nomu *simetria* se anguloj α kaj α' estas samaj. Pro (2) kaj (4), ĉi tie fariĝas simetria aberacio de ĉiu vidata cirklo. Estas mirinda, ke tiu fenomeno okazas ekde komenco de movado de observanto, eĉ kun iu ajn valoro de konstanta propra akcelo.

3 Konkludo

Ni montris ke ne okazas Dopplera efiko sed estas simetria *forta* aberacio, tiel ke la lumaj cirkloj estas simetrie vidataj en la direkto mala al la ekbrilanta ebena. Komence la observanto vidas malgrandan cirklon ĉe $\alpha = 90^\circ$, poste la angulo progrese etiĝas ĝis nuli.

La metodo, kiun ni uzis ĉi tie por kalkuli Doppleran efikon, estas tre kompakta. Tamen la metodo uzata en niaj antaŭaj artikoloj [6, 7, 8, 9, 10] malkaŝas gravan proprecon de propra akcelo.

Tion celante, konsideru en sistemo S' de figuro 1 lumsignalon eligitan en momento t'_f kaj perceptatan en momento t'_o . Do la elig-eniga ekvacio estas $c(t'_o - t'_f) = \sqrt{z'^2(t'_o) + r^2}$; ĉi tie $z'(t'_o)$ estas kiel en (1), kaj r estas radiuso de cirklo vidata per observanto en momento t'_o . Diferenciante kaj poste farante $t'_f = 0$ kaj $dt'_f = d\tau_f$, ni ricevas $d\tau_f = d\tau_o$, kaj do $D = d\tau_f/d\tau_o = 1$. Tiu rezulto aperas kaŝita en antaŭa artikolo [9]. Fakte, ĉiu lumsignalo en nuna artikolo estas kiel la signalo en limo inter fazoj 1 kaj 2 en sekcio 5 de [9].

Simile oni povus ricevi ĉiujn ajn rezultojn el antaŭaj sekcioj en ĉi tiu artikolo. Sed nun interesas nur la kompreno de graveco de konstanteco de propra akcelo al nuligo de Dopplera efiko.

Do, konsideru lumsignalon eligitan je $t'_f = 0$, kaj inercian sistemon de momenta senmovo de observanto je tiu momento. En tiu sistemo, observanto havas konstantan propran akcelon a en direkto z' , kaj fonto restas en la sama $z' = 0$ kaj distancas r perpendikulare.

Plu, konsideru duan signalon eligitan je momento dt'_f , kaj inercian sistemon de momenta senmovo de observanto je tiu momento. En tiu dua sistemo, observanto havas konstantan propran akcelon a en direkto z' , estas en loko dz' , kaj la fonto havas infiniteziman rapidon en direkto malpozitiva de z' kaj distancas r perpendikulare. Ĉar la interspaco trakurata per la observanto estas duagrada en dt'_f , tial la observanto estas konsiderata ankoraŭ en la komenca loko.

Por movado de lumsignalo, la rapido de fonto ne gravas. Ankaŭ rimarku, ke la infinitezima rapido de la fonto kontribuas dugrade al γ , do $d\tau_f = dt'_f$. Tial la intertempo inter eligo kaj percepto estas la sama por la du signaloj, t.e., $\tau_o - 0 = (\tau_o + d\tau_o) - (0 + d\tau_f)$. Do $d\tau_o = d\tau_f$ kaj do $D := d\tau_f/d\tau_o = 1$, t.e., Dopplera efiko ne estas. Rimarku, ke tiu argumento nur validas kun propra akcelo, ĉar ĉi tiu estas difinata en inerciaj sistemoj de momenta senmovo.

Ni opinias, ke la rezultoj de ĉi tiu artikolo evidentigas la mirindan gravecon de konstanta propra akcelo ĉe special-relativeco.

Referências

- [1] C. Møller, *The theory of relativity*, 2nd ed., Oxford U P, 1972.
- [2] W. Rindler, *Essential relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1977.
- [3] J. Dwayne Hamilton, *The uniformly accelerated reference frame*, Am. J. Phys. **46** 83-9, 1978.
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, 4th rev. English ed., Butterworth-Heinemann, 1996.
- [5] W. Cochran, *Some results on the relativistic Doppler effect for accelerated motion*, Am. J. Phys. **57** 1039-41, 1989.
- [6] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *La relativeca tempo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-006/06, 2006; <http://arxiv.org/abs/physics/0603053>.
- [7] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – I*, Notas de Física, CBPF-NF-002/07, 2007; <http://arxiv.org/abs/physics/0701092>.
- [8] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – II*, Notas de Física, CBPF-NF-011/07, 2007; <http://arxiv.org/abs/0704.1130>.
- [9] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko inter du akcelataj korpoj – I*, Notas de Física, CBPF-NF-001/08, 2008; <http://arxiv.org/abs/0801.2290>.
- [10] F. M. Paiva kaj A. F. F. Teixeira, *Relativeca Dopplera efiko ĉe unuforme akcelata movo – III*, Notas de Física, CBPF-NF-018/08, 2008; <http://arxiv.org/abs/0808.0126>.