Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una reformulación de la mecánica clásica que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

La posición inercial $\mathbf{r}_i$, la velocidad inercial $\mathbf{v}_i$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ de una partícula i, están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

($\mathbf{v}_i \doteq d(\mathbf{r}_i)/dt$) y ($\mathbf{a}_i \doteq d^2(\mathbf{r}_i)/dt^2$) donde $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

La fuerza neta $\mathbf{F}_i$ que actúa sobre una partícula i (m_i) produce una aceleración inercial $\mathbf{a}_i$, según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$$

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

Las magnitudes [m_i, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{F}_i$] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y S es además inercial si la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa $\quad \mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$

Posición CM 1 $\quad \mathbf{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \mathbf{r}_i$

Velocidad CM 1 $\quad \mathbf{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \mathbf{v}_i$

Aceleración CM 1 $\quad \mathbf{A}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \mathbf{a}_i$

Posición CM 2 $\quad \vec{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \vec{r}_i$

Velocidad CM 2 $\quad \vec{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \vec{v}_i$

Aceleración CM 2 $\quad \vec{A}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \vec{a}_i$

Momento Lineal 1 $\quad \mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \mathbf{v}_i$

Momento Angular 1 $\quad \mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \,\right]$

Momento Angular 2 $\quad \mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \,\right]$

Trabajo 1 $\quad \mathrm{W}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta\, \mathrm{K}_1$

Energía Cinética 1 $\quad \Delta\, \mathrm{K}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v}_i)^2$

Energía Potencial 1 $\quad \Delta\, \mathrm{U}_1 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$

Energía Mecánica 1 $\quad \mathrm{E}_1 \doteq \mathrm{K}_1 + \mathrm{U}_1$

Lagrangiano 1 $\quad \mathrm{L}_1 \doteq \mathrm{K}_1 - \mathrm{U}_1$

Trabajo 2 $\quad \mathrm{W}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta\, \mathrm{K}_2$

Energía Cinética 2 $\quad \Delta\, \mathrm{K}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$

Energía Potencial 2 $\quad \Delta\, \mathrm{U}_2 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$

Energía Mecánica 2 $\quad \mathrm{E}_2 \doteq \mathrm{K}_2 + \mathrm{U}_2$

Lagrangiano 2 $\quad \mathrm{L}_2 \doteq \mathrm{K}_2 - \mathrm{U}_2$

Trabajo 3 $\quad \mathrm{W}_3 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right] = \Delta\, \mathrm{K}_3$

Energía Cinética 3 $\quad \Delta\, \mathrm{K}_3 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i \left[(\mathbf{v}_i)^2 + \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i \right]$

Energía Potencial 3 $\quad \Delta\, \mathrm{U}_3 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right]$

Energía Mecánica 3 $\quad \mathrm{E}_3 \doteq \mathrm{K}_3 + \mathrm{U}_3$

Trabajo 4 $\quad \mathrm{W}_4 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right] = \Delta\, \mathrm{K}_4$

Energía Cinética 4 $\quad \Delta\, \mathrm{K}_4 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i \left[(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]$

Energía Potencial 4 $\quad \Delta\, \mathrm{U}_4 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]$

Energía Mecánica 4 $\quad \mathrm{E}_4 \doteq \mathrm{K}_4 + \mathrm{U}_4$

Principios

El momento lineal $[\, \mathbf{P}_1 \,]$ de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathbf{P}_1)/dt = \sum_i^{\mathrm{N}} m_i\, \mathbf{a}_i = \sum_i^{\mathrm{N}} \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

El momento angular $[\, \mathbf{L}_1 \text{ y } \mathbf{L}_2 \,]$ de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathbf{L}_1)/dt = \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i \right] = \sum_i^{\mathrm{N}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

$$\mathbf{L}_2 = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathbf{L}_2)/dt = \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \right] = \right.$$

$$\left. \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i \right] = \sum_i^{\mathrm{N}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

La energía mecánica $[\, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3 \text{ y } \mathrm{E}_4 \,]$ de un sistema de N partículas permanece constante si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$\mathrm{E}_1 = \text{constante} \qquad [\, \Delta\, \mathrm{E}_1 = \Delta\, \mathrm{K}_1 + \Delta\, \mathrm{U}_1 = 0 \,]$$

$$\mathrm{E}_2 = \text{constante} \qquad [\, \Delta\, \mathrm{E}_2 = \Delta\, \mathrm{K}_2 + \Delta\, \mathrm{U}_2 = 0 \,]$$

$$\mathrm{E}_3 = \text{constante} \qquad [\, \Delta\, \mathrm{E}_3 = \Delta\, \mathrm{K}_3 + \Delta\, \mathrm{U}_3 = 0 \,]$$

$$\mathrm{E}_4 = \text{constante} \qquad [\, \Delta\, \mathrm{E}_4 = \Delta\, \mathrm{K}_4 + \Delta\, \mathrm{U}_4 = 0 \,]$$

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$.

En este trabajo, las magnitudes [m, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, M, $\mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathrm{W}_1, \mathrm{K}_1, \mathrm{U}_1, \mathrm{E}_1, \mathrm{L}_1$, $\mathrm{W}_2, \mathrm{K}_2, \mathrm{U}_2, \mathrm{E}_2, \mathrm{L}_2, \mathrm{W}_3, \mathrm{K}_3, \mathrm{U}_3, \mathrm{E}_3, \mathrm{W}_4, \mathrm{K}_4, \mathrm{U}_4$ y E_4] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica E_1 de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica E_3 del sistema de partículas [$\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_3$]

La energía mecánica E_2 de un sistema de partículas es igual a la energía mecánica E_4 del sistema de partículas [$\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_4$]

El promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_3 \rangle$ de un sistema de partículas con desplazamiento acotado es igual a cero. Por lo tanto, la energía mecánica E_3 del sistema de partículas es igual al promedio de la energía potencial $\langle \mathrm{U}_3 \rangle$ del sistema de partículas [$\mathrm{E}_3 = \langle \mathrm{U}_3 \rangle$]

El promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_4 \rangle$ de un sistema de partículas con desplazamiento acotado es igual a cero. Por lo tanto, la energía mecánica E_4 del sistema de partículas es igual al promedio de la energía potencial $\langle \mathrm{U}_4 \rangle$ del sistema de partículas [$\mathrm{E}_4 = \langle \mathrm{U}_4 \rangle$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k entonces la energía potencial U_3 del sistema de partículas, está dada por: [$\mathrm{U}_3 = (1 + \frac{\mathrm{k}}{2})\, \mathrm{U}_1$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k entonces la energía potencial U_4 del sistema de partículas, está dada por: [$\mathrm{U}_4 = (1 + \frac{\mathrm{k}}{2})\, \mathrm{U}_2$]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_1 es igual a la energía potencial U_2 si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_2$]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_3 es igual a la energía potencial U_4 si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_3 = \mathrm{U}_4$]

La energía cinética K_4 es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el free-system [tales como: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$, etc.]

La energía cinética K_4 es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud lineal o angular alguna [$\mathrm{K}_4 = \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} 1/2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} (\, \dot{r}_{ij}\, \dot{r}_{ij} + \ddot{r}_{ij}\, r_{ij}\,)$]

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y S es además inercial si la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

Este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, la ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i\, \mathbf{a}_i$] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

Anexo I

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\, \vec{r}_i - \vec{R}\, |^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\vec{L} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \doteq \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2\, \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\, \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')\,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') \doteq \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

Anexo II

Relaciones

El momento angular $\mathbf{L}_2$ de un sistema de N partículas puede ser también expresado así:

$$\mathbf{L}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,\big]$$

El trabajo W_2, la energía cinética K_2 y la energía potencial U_2 de un sistema de N partículas pueden ser también expresados como sigue:

$$\mathrm{W}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big]$$

$$\Delta\,\mathrm{K}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\; m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \,(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 \;=\; \mathrm{W}_2$$

$$\Delta\,\mathrm{U}_2 \;=\; -\textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big]$$

El trabajo W_4, la energía cinética K_4 y la energía potencial U_4 de un sistema de N partículas pueden ser también expresados como sigue:

$$\mathrm{W}_4 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta\, {}^1\!/_2\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big]$$

$$\Delta\,\mathrm{K}_4 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\; m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big] \;=\; \mathrm{W}_4$$

$$\Delta\,\mathrm{U}_4 \;=\; -\textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta\, {}^1\!/_2\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big]$$

Si el sistema de N partículas es aislado y si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil entonces el trabajo W_2 y la energía potencial U_2 pueden ser también expresados como sigue:

$$\mathrm{W}_2 \;=\; \textstyle\sum_{i}^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i \;=\; \Delta\,\mathrm{K}_2$$

$$\Delta\,\mathrm{U}_2 \;=\; -\textstyle\sum_{i}^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

Si el sistema de N partículas es aislado y si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil entonces el trabajo W_4 y la energía potencial U_4 pueden ser también expresados como sigue:

$$\mathrm{W}_4 \;=\; \textstyle\sum_{i}^{\mathrm{N}} \big[\, \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \,\big] \;=\; \Delta\,\mathrm{K}_4$$

$$\Delta\,\mathrm{U}_4 \;=\; -\textstyle\sum_{i}^{\mathrm{N}} \big[\, \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \,\big]$$